Über die Differentialmoduln endlicher Algebren

Dissertation
zur Erlangung des Grades des
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematischen Fakultät
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
Willi Urban

Bochum
1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547222_0038

Über die Differentialmoduln endlicher Algebren

Dissertation
zur Erlangung des Grades des
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematischen Fakultät
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
Willi Urban

Bochum
1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referenten:

Prof. Dr. G. Scheja

Prof. Dr. U. Storch

Tag der mündlichen Prüfung: 7. 10. 1982

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Einleitung	
§ 1.	*Der verallgemeinerte Weierstraßsche Vorbereitungssatz für Ideale.*	1
§ 2.	*Die Länge des Differentialmoduls einer endlichen Algebra.*	18
§ 3.	*Weitere Längenabschätzungen.*	37
§ 4.	*Der De Rham-Komplex einer endlichen Algebra.*	57
§ 5.	*Die Torsion des Differentialmoduls von Kurvensingularitäten.*	70
	Literaturverzeichnis	

Einleitung

Die Einführung der Differentialmoduln durch E. Kähler hat insbesondere der Theorie singularitätenfreier algebraischer Mannigfaltigkeiten neue Impulse gegeben. Hingegen war über Differentialmoduln bei algebraischen Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten, insbesondere also Differentialmoduln nichtregulärer lokaler Ringe, außer der Kenntnis der minimalen Erzeugendenzahl des Differentialmoduls eines beliebigen lokalen Ringes und des Regularitätskriteriums (Ein lokaler Ring der Charakteristik Null ist genau dann regulär, wenn sein Differentialmodul frei ist) nichts bekannt.

Im Jahre 1963 war R. Berger einer der Ersten, die sich bemühten, die Struktur des Differntialmoduls im singulären Fall zu untersuchen ([2]). Dort untersucht er die Beschaffenheit des Differentialmoduls eines nichtregulären lokalen Ringes der Dimension 1. Während im Allgemeinen auch bei einem nichtregulären Ring der Differentialmodul torsionsfrei sein kann (Ist A eine analytische Algebra über einem vollständigen Körper k, die ein normaler reduzierter vollständiger Durchschnitt ist, so ist $D_k(R)$ torsionsfrei), vermutete Berger, daß im Falle eines eindimensionalen Ringes die Torsionsfreiheit des Differentialmoduls

gleichbedeutend mit der Regularität des Ringes ist. Ziel seiner Arbeit war es daher, Aussagen über die Torsion des Differentialmoduls eines eindimensionalen Ringes zu gewinnen. Hauptresultat seiner Arbeit ist eine Längenformel für die Torsion des Differentialmoduls eines fastvollständigen, eindimensionalen Integritätsringes, aus der insbesondere folgt, daß bei Nichtregularität die Torsion des Differentialmoduls nicht verschwindet. Ein wesentliches Hilfsmittel war eine Längenformel für einen Modul M vom Rang 1 und endlicher projektiver Dimension über einem eindimensionalen reduzierten Ring.
Seitdem ist in einigen weiteren Spezialfällen die Vermutung, daß bei Nichtregularität des Ringes der Differentialmodul stets Torsion hat, bestätigt worden. Herzog ([7]) zeigt dies für den Fall, daß die Einbettungsdimension des Ringes Dim R = 3 ist und für den Fall Dim R = 4 und R gorensteinsch. Er nutzt dabei aus, daß nach Eisenbud-Buchsbaum solche Ringe Restklassenringe eines formalen Potenzreihenringes nach Idealen sind, die von maximalen Minoren geeigneter Matrizen erzeugt werden. In ([8]) zeigen Herzog-Waldi, daß Ringe, die in der "linkage class" von vollständigen Durchschnitten liegen, die Bergersche Vermutung erfüllen. Ulrich ([14]) verfeinert Bergers Längenformel für Moduln und zeigt die Bergersche Vermutung für nullteilerfreie eindimensionale Ringe $\frac{k[[X_1,\ldots,X_n]]}{\mathfrak{a}}$, wo die minimale Erzeugendenzahl des Ideals $\mathfrak{a}$ von der Höhe des

Ideals höchstens um 3 abweicht. Schließlich zeigte Bassein ([1]) die Bergersche Vermutung für glättbare Kurvensingularitäten, was Buchweitz-Greuel ([3]) für Kurven, die Deformationen besitzen, welche den Singularitätsgrad genügend erniedrigen, verallgemeinern. In ([10]) schätzte Scheja die Länge der Torsion des Differentialmoduls einer fasthomogenen eindimensionalen separablen analytischen k-Algebra ab. Er vermutet in dieser Arbeit, daß für nulldimensionale analytische k-Algebren die Länge des Differentialmoduls größer oder gleich der Länge der k-Algebra ist, falls die Einbettungsdimension der Algebra größer als 2 ist. Er zeigt, daß seine Vermutung die Bergersche Vermutung impliziert.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Struktur der Differentialmoduln endlicher k-Algebren. Diese Fragestellung ist in der Literatur bisher noch nicht behandelt worden. Ein wesentliches methodisches Hilfsmittel bei der Untersuchung dieser Frage ist die Theorie des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes für Ideale, die im ersten Kapitel behandelt wird. Einem Ideal lassen sich eindeutig bestimmte Weierstraßpolynome zuordnen, die das Ideal erzeugen. Da der verallgemeinerte Weierstraßsche Vorbereitungssatz für Ideale auch für sich interessant ist, ist die Darstellung allgemeiner als sie in den folgenden Kapiteln benötigt wird.

Eines der Hauptresultate dieser Arbeit ist die Längenformel $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A$ für den Differentialmodul $D_k(A)$ eines nulldimensionalen Restklassenringes A des formalen Potenzreihenringes in zwei Unbestimmten. Hierbei wird verwendet, daß man mit Hilfe des verallgemeinerten Weierstraßschen Vorbereitungssatzes die Relationen eines Erzeugendensystems eines Ideals explizit beschreiben kann.
Als Folgerung erhält man: Ist A ein Ring, R eine endliche A-Algebra, die als Algebra von zwei Elementen erzeugt wird, so ist die minimale Erzeugendenzahl von $D_A(R)$ wenigstens um Eins größer als die minimale Erzeugendenzahl von R als A-Modul. Von Interesse dürfte auch die Längenformel in Satz 7 sein. Mit ihrer Hilfe gewinnt man die Bergersche Vermutung für vollständige Durchschnitte auf eine wesentlich andere Art als Berger. In der Folge wird die Längenformel $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A$ für den Differentialmodul von $A = \frac{k[[X_1,\dots,X_n]]}{\mathfrak{a}}$ bewiesen, falls $N^n \setminus v(\mathfrak{a})$ ein "Würfel" in N^n ist. (Zur Definition von $v(\mathfrak{a})$ siehe Seite 12). Abschließend wird die Länge des Konormalenmoduls einer nulldimensionalen Restklassenalgebra der Einbettungsdimension 2 elementarer als in ([7]) berechnet.
Eines der wesentlichen Resultate des dritten Kapitels ist eine Abschätzung nach unten von $\dim_k \operatorname{cokern} d_A$, wo $d_A : A \longrightarrow D_k(A)$ die universelle A-Derivation für eine endliche k-Algebra ist. Ferner vergleiche

ich die Länge des Differentialmoduls mit der Länge von äußeren Potenzen des Differentialmoduls. Hierbei ist auch die Beweismethode interessant: Im Induktionsschritt vermindert man die Länge der endlichen Algebra durch ein besonders einfach gewähltes Element von $\mathrm{Ann}_A\, m_A$.
Die Bergersche Beweisidee geht von einer Längenabschätzung für Moduln vom Rang 1 mit endlicher homologischer Dimension aus. Ich untersuche, ob es möglich ist, ähnliche Längenabschätzungen für endliche Moduln über artinsche Ringe zu bekommen. Auf kanonische Weise - mit der Cramerschen Regel - bekommt man Satz 14. Wie die dann folgenden Beispiele zeigen, gewinnt man nur in Spezialfällen Abschätzungen für die Länge des Differentialmoduls.
Im vierten Kapitel wird der De Rham-Komplex endlicher Algebren untersucht. Eine wichtige Invariante für eine endliche k-Algebra A der Einbettungsdimension n ist

$$\varkappa(A) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k \bigwedge^i D_k(A) - 1.$$

Es wird die Frage untersucht, ob $\varkappa(A)$ stets positiv oder ob $\varkappa(A)$ stets negativ ist. Ich gebe Beispiel an, wo im ersten Fall $\varkappa(A) > 0$ und im zweiten Fall $\varkappa(A) < 0$ gilt. Ferner wird ein Beispiel angeführt, wo der De Rham-Komplex exakt ist, die Algebra aber nicht quasihomogen ist. Ich beweise eine Abschätzung

nach oben für die Länge des Differentialmoduls eines endlichen Restklassenringes des Potenzreihenrings in zwei Unbestimmten. Daraus ergibt sich ein Kriterium für die Exaktheit des De Rham-Komplexes.
Im letzten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen der Längenformel für den Differentialmodul einer endlichen k-Algebra und der Bergerschen Vermutung beschrieben.

Herrn Professor G. Scheja möchte ich an dieser Stelle dafür danken, daß er mich zur Untersuchung dieser Fragen angeregt hat.

§ 1. Der verallgemeinerte Weierstraßsche Vorbereitungssatz für Ideale.

(1.1) Sei A ein kommutativer Ring mit Eins, $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein Ideal, so daß A separiert und komplett ist bzgl. der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie.

Sei $B := A[\![X]\!] := A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ der formale Potenzreihenring über A in n Unbestimmten und $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}B + (X)B$. Dann ist B separiert und komplett bzgl. der $\mathfrak{n}$-adischen Topologie.

(1.2) Im Folgenden sei $\leq$ eine Ordnung des $\mathbb{N}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $(\mathbb{N}^n, \leq)$ ist eine vollständig geordnete Menge, d.h. $\mu, \nu \in \mathbb{N}^n \Rightarrow \mu \leq \nu$ oder $\nu \leq \mu$.

(2) $\leq$ ist verträglich mit der additiven Struktur des $\mathbb{N}^n$, d.h. $\mu, \nu, \lambda \in \mathbb{N}^n$ mit

$$\mu \leq \nu \implies \mu + \lambda \leq \nu + \lambda \quad .$$

(3) $(0) := (0, \ldots 0) \in \mathbb{N}^n$ erfüllt $(0) \leq \mu \quad \forall \mu \in \mathbb{N}^n$.

Beispiele einer solchen Ordnung sind:

(1) Die lexikographische Ordnung des $\mathbb{N}^n$:

$\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$, $\mu \leq_l \nu :\Leftrightarrow \mu_1 = \nu_1, \ldots, \mu_{i-1} = \nu_{i-1}$ und $\mu_i < \nu_i$.

(2) Sei $\alpha : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}_+$ ein injektiver Halbgruppenhomomorphismus (bezüglich der additiven Strukturen mit $\alpha((0)) = 0$)

Dann sei:

$\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$, $\mu \leq_\alpha \nu :\Leftrightarrow \alpha(\mu) \leq \alpha(\nu)$

(3) Sei $\alpha: \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Halbgruppenhomomorphismus. Dann sei $\mu \leq \nu :\Longleftrightarrow$ $\alpha(\mu) < \alpha(\nu)$ oder $(\alpha(\mu) = \alpha(\nu), \mu \leqq \nu)$.

(1.3) Eine Teilmenge $H \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt Halbgruppenideal, wenn gilt:
(1) $H \neq \emptyset$, (2) $H + \mathbb{N}^n \subseteq H$.

Bemerkung: Halbgruppenideale sind endlich erzeugt.

Zu zeigen ist: Es existiert eine endliche Menge $E \subseteq \mathbb{N}^n$ mit $H = \bigcup_{\mu \in E} (\mu + \mathbb{N}^n)$.

Für $\mu \in H$ sei $D(\mu) := \{\nu \in H / \mu - \nu \in \mathbb{N}^n\}$.

$F(H) := \{\mu \in H / D(\mu) = \{\mu\}\}$ sei die Menge der Extremalpunkte von H.

Ich behaupte: F(H) ist eine endliche Menge.

Ich zeige dies durch Induktion nach n.

Im Falle n=1 ist die Behauptung offensichtlich richtig.

Der Induktionsschritt: Sei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in F(H)$.

Für $1 \leq i \leq n$ und $0 \leq c < \mu_i$ sei $N_{i,c} := \{(\nu_1, \ldots, \nu_n) / \nu_i = c\}$.

Sei $K_{i,c} := \{(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_n) / (\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}, c, \nu_i, \ldots, \nu_n) \in H\}$.

$K_{i,c}$ ist ein Halbgruppenideal in $\mathbb{N}^{n-1}$ und es gilt:

$F(H) \cap N_{i,c} \subset \{(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}, c, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_n) / (\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_n) \in F(K_{i,c})\}$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $F(K_{i,c})$ endlich, also auch $F(H) \cap N_{i,c}$.

Nun gilt:

$$F(H) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{c=0}^{\mu_i - 1} F(H) \cap N_{i,c} \cup \{\mu\}.$$

Ist nämlich $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in F(H)$ und

$\lambda \notin \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{c=0}^{\mu_i - 1} F(H) \cap N$,

so gilt $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{c=0}^{\mu_i - 1} N_{i,c}$, d.h. es gilt $\lambda_i \geq \mu_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ und damit $\lambda - \mu \in \mathbb{N}^n$.

Das bedeutet $\mu \in D(\lambda)$ und wegen $\lambda \in F(H)$, also $\lambda = \mu$.

Da $F(H) \cap N_{i,c}$ stets endlich ist, bedeutet dies, $F(H)$ ist endlich.

Es gilt: $H = \bigcup_{\mu \in F(H)} \mu + \mathbb{N}^n$.

Sei $\nu \in H$ und sei dann $\mu := \min D(\nu)$. Dann gilt: $\mu \in F(H)$. Ist nämlich $\lambda \in D(\mu)$, so folgt $\mu - \lambda \in \mathbb{N}^n$. Wegen $\mu \in D(\nu)$ gilt $\nu - \mu \in \mathbb{N}^n$, also folgt $\nu - \lambda \in \mathbb{N}^n$, d.h. $\lambda \in D(\nu)$ und damit $\lambda \geq \mu$.

Mit $\mu - \lambda \in \mathbb{N}^n$ ergibt sich $\lambda = \mu$.

Somit ist $\nu \in \mu + \mathbb{N}^n$ und $\mu \in F(H)$.

Bemerkung: $(\mathbb{N}^n, \leq)$ ist wohlgeordnet.

Zu zeigen ist: Jede nichtleere Teilmenge des $\mathbb{N}^n$ besitzt ein minimales Element.

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}^n$. Dann ist $H(M) = \bigcup_{\mu \in M} \mu + \mathbb{N}^n$ endlich erzeugt, also $H(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \mu_i + \mathbb{N}^n$.

Dann ist $\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i$ das minimale Element von M.

(1.4) Satz 1 (Verallgemeinerter Weierstraßscher Divisionssatz)

Seien $(0) < \mu_1 < \ldots < \mu_m \in \mathbb{N}^n$ und $D_1, \ldots, D_m$, $D \subseteq \mathbb{N}^n$ derart, daß

$$\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} (\mu_i + D_i) \cup D = \mathbb{N}^n$$

eine disjunkte Zerlegung des $\mathbb{N}^n$ ist.

Seien $\omega_i \in B$ mit $\omega_i = X^{\mu_i} + h_i$, wobei $h_i = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} h_{i,\mu} X^{\mu}$ mit $h_{i,\mu} \in m \; \forall \mu \leq \mu_i$.

Schließlich seien $V_i := \{ f \in B \mid f = \sum_{\nu \in D_i} a_\nu X^\nu \}$

und $V := \{ f \in B \mid f = \sum_{\nu \in D} a_\nu X^\nu \}$.

Dann gilt: $V_1 \omega_1 \oplus_A \ldots \oplus V_m \omega_m \oplus_A V = B$.

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt:

$$V_1 X^{\mu_1} \oplus_A \dots \oplus_A V_m X^{\mu_m} \oplus_A V = B.$$

Gesucht werden zu jedem $f \in B$ eindeutig bestimmte

$q_i \in V_i$, $r \in V$ mit

$$f = \sum_{i=1}^{m} q_i \omega_i + r.$$

Zu jedem $f \in B$ definiere ich eine Folge $(f^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in B durch:

(1) Für k=0 setzt man: $f^{(0)} := f$.

(2) Ist $f^{(k-1)}$ bereits definiert, dann existieren nach Voraussetzung eindeutig bestimmte $q_i^{(k-1)} \in V_i$, $r^{(k-1)} \in V$ mit

$$f^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{m} q_i^{(k-1)} X^{\mu_i} + r^{(k-1)}.$$

Dann setzt man: $f^{(k)} := - \sum_{i=1}^{m} q_i^{(k-1)} h_i$.

Sei $f^{(k)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu^{(k)} X^\nu$.

Nach der obigen Definition von $(f^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$a_\nu^{(k)} = - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{\nu = \lambda + \mu \\ \lambda \in D_i}} a_\lambda^{(k-1)} h_{i,\mu}.$$

Ich zeige: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^n \exists k_0(\nu, n)$,

so daß $\forall k > k_0$ gilt: $a_\nu^{(k)} \in \mathfrak{m}^n$.

Induktion nach n:

Der Fall n=0 ist trivial.

Den Induktionsschritt zeige ich durch (transfinite) Induktion nach ν:

$\nu = (0)$: $a_{(0)}^{(k)} = - \sum_{i=1}^{m} a_{\mu_i}^{(k-1)} h_{i,(0)}$.

Nach Induktionsvoraussetzung über n gilt:

$\forall \nu \in \mathbb{N}^n \quad \exists k_0(\nu, n-1)$, so daß $\forall k > k_0 : a_\nu^{(k)} \in \mathfrak{m}^{n-1}$ gilt.

Sei also $k_0((0),n) := \max_{1 \le i \le m} (k_0(\mu_i, n-1)+1)$, so daß

$a_{\mu_i}^{(k-1)} \in \mathfrak{m}^{n-1} \quad \forall k > k_0((0),n) \quad \forall 1 \le i \le m$ gilt.

Es ist $(0) < \mu_i \; \forall \; 1 \leq i \leq m$, also $h_{i,(0)} \in \mathfrak{m} \; \forall \; 1 \leq i \leq m$.

Also gilt für alle $1 \leq i \leq m$:

$$a_{\mu_i}^{(k-1)} h_{i,(0)} \in \mathfrak{m}^n \quad \forall \; k > k_o \; ((0),n).$$

Der Induktionsschritt:

Sei $\nu > (0)$.

$$a_{\nu}^{(k)} = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{\nu = \lambda + \mu \\ \lambda \in D_i}} a_{\lambda+\mu_i}^{(k-1)} \; h_{i,\mu} .$$

Nach Induktionsvoraussetzung über n gilt:

$$\forall \varkappa \in \mathbb{N}^n \quad \exists \; k_o \; (\varkappa, n-1) \; \forall \; k > k_o \; (\varkappa, n-1): \; a_{\varkappa}^{(k)} \in \mathfrak{m}^{n-1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung über ν gilt:

$$\forall \varkappa < \nu \exists \; k_o \; (\varkappa, n) \forall \; k > k_o (\varkappa, n) : \quad a_{\varkappa}^{(k)} \in \mathfrak{m}^n.$$

Sei dann $\Delta(\nu) := \{ \varkappa \in \mathbb{N}^n \; / \varkappa_i \leq \nu_i \; \forall \; 1 \leq i \leq n \}$

und $k_o(\nu,n) := 1 + \max \Big(\max_{1 \leq i \leq m} \big(\max_{\varkappa \in \Delta(\nu)} (k_o(\varkappa+\mu_i, n-1)) \big),$

$$\max_{1 \leq i \leq m} \Big(\max_{\substack{\varkappa \in \Delta(\nu) \\ \varkappa + \mu_i < \nu}} (k_o(\varkappa+\mu_i, n)) \Big) \Big).$$

Sei nun $\nu = \mu + \lambda$, $\lambda \in D_i$.

Zu zeigen ist: $a_{\lambda+\mu_i}^{(k-1)} h_{i,\mu} \in \mathfrak{m}^n$ für jedes i mit $1 \leq i \leq m$.

Sei jetzt i fest gewählt und $\mu \in \mathbb{N}^n$, $\lambda \in D_i$ mit $\mu + \lambda = \nu$.

Für $\mu \leq \mu_i$ gilt $h_{i,\mu} \in \mathfrak{m}$ und $a_{\lambda+\mu_i}^{(k-1)} \in \mathfrak{m}^{n-1} \quad k > k_o \; (\nu,n)$.

(Da $k > k_o \; (\nu,n)$ und $\lambda \in \Delta(\nu)$ sind, folgt $k-1 > k_o \; (\lambda+\mu_i, n-1)$, also $a_{\lambda+\mu_i}^{(k-1)} \in \mathfrak{m}^{n-1}$).

Also folgt $h_{i,\mu} \; a_{\lambda+\mu_i}^{(k-1)} \in \mathfrak{m}^n$.

Für $\mu > \mu_i$ gilt $\lambda \in \Delta(\nu)$, $\lambda + \mu_i < \lambda + \mu = \nu$, also:

$a_{\lambda+\mu_i}^{(k-1)} \in \mathfrak{m}^n \quad \forall \; k > k_o \; (\nu,n)$.

Insgesamt folgt: $a_{\nu}^{(k)} \in \mathfrak{m}^n \quad \forall \; k > k_o \; (\nu,n)$.

Ich zeige nun: $\lim_{k \in \mathbb{N}} f^{(k)} = 0$

Da B separiert ist, genügt es Folgendes zu zeigen:

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k_o(n)$, so daß $\forall\, k > k_o(n)$: $f^{(k)} \in \mathcal{M}^n$ gilt.

Sei $k_o(n) := \max_{|\nu| < n} k_o(\nu, n)$ $(|\nu| := \sum_{j=1}^{r} \nu_j)$, so folgt:

$a_\nu^{(k)} \in \mathcal{M}^{n-|\nu|}\ \forall\, k > k_o(n)$, also $f^{(k)} \in \mathcal{M}^n\ \forall\, k > k_o(n)$.

Genauso folgt: $\lim_{k \in \mathbb{N}} q_i^{(k)} = 0$ und $\lim_{k \in \mathbb{N}} r^{(k)} = 0$.

Da B komplett ist, existieren damit $\sum_{k \in N} f^{(k)}$, $q_i := \sum_{k \in N} q_i^{(k)}$

und $r := \sum_{k \in N} r^{(k)}$.

V_i und V sind abgeschlossen in der $\mathcal{M}$- adischen Topologie.

Damit folgt aus $q_i^{(k)} \in V_i$ bzw. $r^{(k)} \in V\ \forall\, k \in \mathbb{N}$,

$q_i \in V_i$ und $r \in V$.

Schließlich gilt:

$$f = \sum_{k \in N} (f^{(k)} - f^{(k+1)}) = \sum_{k \in N} (\sum_{i=1}^{m} q_i^{(k)} X^{\mu_i} + r^{(k)} +$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_i^{(k)} h_i) = \sum_{k \in N} (\sum_{i=1}^{m} q_i^{(k)} \omega_i + r^{(k)}) =$$

$$- \sum_{i=1}^{m} (\sum_{k \in N} q_i^{(k)}) \omega_i + \sum_{k \in N} r^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} q_i \omega_i + r \quad ;$$

womit die Existenz einer solchen Zerlegung gezeigt ist.

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung.

Sei $\sum_{i=1}^{m} q_i \omega_i + r = 0$, $q_i \in V_i$, $r \in V$, so ist $q_i = 0 = r$ zu zeigen.

Sei dann $f := \sum_{i=1}^{m} q_i X^{\mu_i} + r = - \sum_{i=1}^{m} q_i h_i$.

Definiert man die zu f gehörige Folge $(f^{(k)})$ wie im ersten Teil des Beweises, so gilt $f = f^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und es folgt wieder: $\lim_{k \in N} f^{(k)} = 0$, also $f = 0$.

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $f = \sum_{i=1}^{m} q_i X^{\mu_i} + r$,

folgt dann $q_i = 0 = r$.

(1.5) Satz 1 ist eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Divisionssatzes.

Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restekörper k, so daß A separiert und komplett ist bzgl. der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie.

$B := A[\![Y]\!]$ sei der formale Potenzreihenring über A in einer Unbestimmten Y.

$\leq$ sei die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$. (Eine Ordnung auf N, die die Bedingungen von (1.2) erfüllt, muß notwendigerweise die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ sein.)

Ist $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu Y^\nu \in B$, so sei $v(f) := \min \{\nu \in \mathbb{N} \mid a_\nu \notin \mathfrak{m}\}$.

Korollar (Weierstraßscher Divisionssatz)

Sei $f \in B$ mit $v(f) \neq \infty$. Sei $s := v(f)$.

Dann gilt: $B = Bf \oplus_A \bigoplus_{i=0}^{s-1} A \cdot Y^i$.

Beweis:

Wegen $v(f)=s$ gilt $f = a_s X^s + h$ mit $a_s \notin \mathfrak{m}$ und $v(h) > s$.

Ich wende Satz 1 mit $\mu_1 = s$, $D_1 = \mathbb{N}$, $D = \{0,\ldots,s-1\}$ und $\omega = X^s + a_s^{-1} h$ an.

Dann ist $V_1 = B$ und $V = \bigoplus_{i=0}^{s-1} A \cdot Y^i$, also:

$$B = Bf \oplus_A \bigoplus_{i=0}^{s-1} A \cdot Y^i .$$

(1.6) k sei ein vollständig bewerteter Körper.

$k\{Y\} := k\{Y_1,..,Y_1\}$ sei der konvergente Potenzreihenring in 1 Unbestimmten über k.

R sei eine lokale analytische k-Algebra, das heißt
R ist Restklassenring von $k\{Y\}$ nach einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq k\{Y\}$.
Sei $B := R\{X\} := R\{X_1, \ldots, X_n\}$ der konvergente Potenzreihenring in n Unbestimmten über R.
Seien $\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$. Die Ordnung auf $\mathbb{N}^n$ sei hier gegeben durch:

$$\mu \prec \nu :\Longleftrightarrow |\mu| < |\nu| \text{ oder}$$
$$(|\mu| = |\nu| \text{ und } \exists\, i: \mu_i < \nu_i \text{ und } \mu_j = \nu_j \;\forall\, i < j \leq n).$$

Dann gilt:

Korollar 2 (Verallgemeinerter Weierstraßscher Divisionssatz im konvergenten Fall).

Seien $(0) \prec \mu_1 \prec \ldots \mu_m \in \mathbb{N}^n$ und $D_1, \ldots, D_m$, $D \subseteq \mathbb{N}^n$ derart, daß

$$\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} (\mu_i + D_i) \;\dot{\cup}\; D = \mathbb{N}^n$$

eine disjunkte Zerlegung des $\mathbb{N}^n$ ist.
Seien $\omega_i \in B$ mit: $\omega_i = X^{\mu_i} + h_i$, wobei $h_i = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} h_{i,\mu} X^{\mu}$ mit $h_{i,\mu} \in (Y)\, k\{Y\}\; \forall \mu \leq \mu_i$.
Schließlich seien $V_i := \{f \in B / f = \sum_{\nu \in D_i} a_\nu X^\nu\}$
und $V := \{f \in B / f = \sum_{\nu \in D} a_\nu X^\nu\}$.
Dann gilt:

$$V_1 \omega_1 \oplus_A \ldots \oplus_A V_m \omega_m \oplus_A V = B \quad .$$

Beweis:

Ist $f \in R\{X\}$, so existieren nach Satz 1 $q_i, r \in R[\![X]\!]$ mit

$$f = \sum_{i=1}^{m} q_i \omega_i + r \quad .$$

Zu zeigen bleibt:

$$q_i,\; r \in R\{X\} \; .$$

Es genügt den Fall $R = k\{Y\}$ zu betrachten.

Ich zeige zunächst:

Für jedes ε mit $0<\varepsilon<1$ existiert ein $(t',t) \in R_+^{\ell} \times R_+^n$ mit:

$$\|h_i\|_{(t',t)} \leq \frac{\varepsilon}{m} t^{\mu_i} \text{ für jedes } 1 \leq i \leq m.$$

Sei $h_{i,1} = \sum_{\mu \leq \mu_i} h_{i,\mu} X^{\mu}$ und $h_{i,2} = \sum_{\mu > \mu_i} h_{i,\mu} X^{\mu}$.

Nach dem nachfolgenden Lemma gilt:

$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^n$ und $\forall\, 1 \leq i \leq m$ $\exists t' \in R_+^{\ell}$ mit:

$$\|h_{i,\mu}\|_{t'} \leq \frac{\varepsilon}{2m_i m} \frac{t^{\mu_i}}{t^{\mu}},$$

wobei $m_i := \text{Anzahl } (\{\mu \in N^n / \mu \leq \mu_i\})$.

Also gilt $\|h_{i,1}\|_{(t',t)} \leq \sum_{\mu \leq \mu_i} \|h_{i,\mu}\|_{t'} t^{\mu} =$

$$= \sum_{\mu \leq \mu_i} \frac{\varepsilon}{2m_i m} t^{\mu_i} = \frac{\varepsilon}{2m} t^{\mu_i}.$$

Genauso folgt aus dem Lemma:

$\exists\, t \in R_+^n$ mit $\|h_{i,2}\|_{(t',t)} \leq \frac{\varepsilon}{2m} t^{\mu_i}$.

Insgesamt gibt es ein $(t',t) \in R_+^{\ell} \times R_+^n$ mit:

$$\|h_i\|_{(t',t)} = \frac{\varepsilon}{m} t^{\mu_i}.$$

Zusätzlich kann man noch $\|f\|_{(t',t)} < \infty$ annehmen.

Aus dem Beweis zu Satz 1 entnimmt man:

$q_i := \sum_{k \in N} q_i^{(k)}$ und $r := \sum_{k \in N} r^{(k)}$, wobei:

$f^{(0)} := f$

$f^{(k)} := \sum_{i=1}^{m} q_i^{(k+1)} X^{\mu_i} + r^{(k+1)}$

und

$f^{(k+1)} = -\sum_{i=1}^{m} q_i^{(k+1)} h_i$ ist.

Da die Zerlegung $f^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} q_i^{(k+1)} X^{\mu_i} + r^{(k+1)}$

disjunkt ist, gilt:

$$\|q_i^{(k+1)}\|_{(t',t)} \leq \|f^{(k)}\|_{(t',t)} t^{-\mu_i}$$

sowie $\|r^{(k+1)}\|_{(t',t)} \leq \|f^{(k)}\|_{(t',t)}$.

$$\|f^{(k+1)}\|_{(t',t)} \leq \sum_{i=1}^{m} \|q_i^{(k+1)}\|_{(t',t)} \|h_i\|_{(t',t)} \leq \sum_{i=1}^{m} \|f^{(k)}\|_{(t',t)} \cdot$$

$$\cdot t^{-\mu_i} \frac{\varepsilon}{m} t^{\mu_i} = \|f^{(k)}\|_{(t',t)} \cdot \varepsilon \quad .$$

Da $f^{(0)} = f$ ist, gilt also $\|f^{(k)}\|_{(t',t)} \leq \|f\|_{(t',t)} \varepsilon^k$.

Also gilt:

$$\|q_i\|_{(t',t)} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|q_i^{(k)}\|_{(t',t)} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f\|_{(t',t)} t^{-\mu_i} \varepsilon^k =$$

$$= \|f\|_{(t',t)} \frac{t^{-\mu_i}}{1-\varepsilon} \quad ,$$

und $\|r\|_{(t',t)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f\|_{(t',t)} \varepsilon^k = \|f\|_{(t',t)} \frac{1}{1-\varepsilon}$.

Nachzutragen bleibt:

Lemma 1

Sind $h = \sum_{\nu > \mu} h_\nu X^\nu \in k\{X\}$ und $\delta \in R_+$,
so existiert ein $t \in R_+^n$ mit $\|h\|_t \leq \delta \cdot t^\mu$.

Beweis:

Es seien $h_1 = \sum_{\substack{\nu > \mu \\ |\nu| = |\mu|}} h_\nu X^\nu$ und $h_2 = \sum_{|\nu| > |\mu|} h_\nu X^\nu$.

Es sei $a := \text{Anz}\{\nu \in \mathbb{N}^n / \nu > \mu, |\nu| = |\mu|\}$.

Ich zeige zunächst, daß zu jedem $\nu \in \mathbb{N}^n$ mit $\nu > \mu$ und $|\nu| = |\mu|$ ein $t = t(\nu) \in R_+^n$ mit $\|h_\nu X^\nu\|_t \leq \frac{\delta}{2a} t^\mu$ existiert.

Für ein festes ν mit dieser Eigenschaft definiert man induktiv:

$$t_1 := 1 \text{ und } t_k := \begin{cases} \left(\frac{\delta}{2a|h_\nu|} \prod_{i=1}^{k-1} t_i^{\mu_i - \nu_i} \right)^{\frac{1}{\nu_k - \mu_k}} & , \text{ falls } \nu_k > \mu_k \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Wegen $\nu > \mu$, $|\nu| = |\mu|$ gilt: $\exists\, 1 \leq k \leq n$ mit $\nu_k > \mu_k$ und

$$\nu_{k+1} = \mu_{k+1}, \ldots, \nu_n = \mu_n \quad .$$

Dann folgt:

$$\| h_\nu X^\nu \|_t = |h_\nu| \, t^\nu = |h_\nu| \prod_{i=1}^{n} t_i^{\nu_i} =$$

$$= |h_\nu| \prod_{i=1}^{k-1} t_i^{\nu_i} \cdot \frac{\delta}{2a|h_\nu|} \prod_{i=1}^{k-1} t_i^{\mu_i - \nu_i} \cdot t_k^{\mu_k} = \frac{\delta}{2a} t^\mu .$$

$t^{(1)} = (t_i^{(1)})_{1 \le i \le n}$ sei dann durch $t_i^{(1)} := \min_{\substack{\nu \ge \mu \\ |\nu| = |\mu|}} t_i(\nu)$

definiert.

Es folgt dann: $\| h_1 \|_{t^{(1)}} \le \sum_{\substack{\nu \ge \mu \\ |\nu| = |\mu|}} \| h_\nu X^\nu \|_{t^{(1)}} \le \frac{\delta}{2} \left(t^{(1)} \right)^\mu .$

Sei $s \in R_+^n$ mit $\| h \|_s < \infty$. Dann ist auch $\| h_2 \|_s < \infty$.

Sei $\gamma < 1$. Dann gilt:

$$\| h_2 \|_{\gamma s} = \sum_{|\nu| > |\mu|} |h_\nu| \cdot (\gamma s)^\nu = \sum_{|\nu| > |\mu|} |h_\nu| \, \gamma^{(|\nu|)} s^\nu \le$$

$$\le \gamma^{|\mu|+1} \cdot \sum_{|\nu| > |\mu|} |h_\nu| \cdot s^\nu = \gamma^{|\mu|+1} \cdot \| h_2 \|_s .$$

Setzt man $\gamma = \min \left(\frac{\delta \cdot t^\mu}{2 \| h_2 \|_s}, \frac{1}{2} \right)$, so folgt:

$$\| h_2 \|_{\gamma s} \le \gamma^{|\mu|} \left(\frac{\delta \cdot t^\mu}{2 \| h_2 \|_s} \right) \cdot \| h_2 \|_s = \frac{\delta}{2} (\gamma s)^\mu .$$

Mit $t^{(2)} := \gamma s$ gilt also : $\| h_2 \|_{t^{(2)}} \le \frac{\delta}{2} \left(t^{(2)} \right)^\mu$.

Sei $t \in R_+^n$ durch $t_i := \min \left(t_i^{(1)}, t_i^{(2)} \right)$ definiert.

Dann gilt: $\| h \|_t \le \delta \cdot t^\mu$.

Im Folgenden sei:

A ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal und Restekörper k. Zusätzlich sei A separiert und komplett bzgl. der $\mathfrak{M}$-adischen Topologie.

$B := A[\![X]\!] := A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ sei der Potenzreihenring in n Unbestimmten über A.

(1.7) Definition: Sei $v: B \longrightarrow N^n$ definiert durch:

$$\sum_{\nu \in N^n} a_\nu X^\nu \longmapsto \min \{ \nu / a_\nu \notin \mathfrak{m} \}$$

Dann gilt: v ist eine Bewertung auf B und $v^{-1}(\infty) = \mathfrak{m}B$.

Beweis:

$v(1) = 0$, $v(0) = \infty$ und $v^{-1}(\infty) = \mathfrak{m}B$ gelten offensichtlic

Sei $f = \sum_{\nu \in N^n} a_\nu X^\nu$, $g = \sum_{\mu \in N^n} b_\mu X^\mu$, $\nu_o := v(f)$ und

$\mu_o := v(g)$.

Dann ist $f+g = \sum_{\lambda \in N^n} (a_\lambda + b_\lambda) X^\lambda$, also gilt:

$a_\lambda + b_\lambda \in \mathfrak{m} \forall \lambda \min(\nu_o, \mu_o)$.

Damit gilt: $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$.

Ist $\lambda = \nu + \mu < \nu_o + \mu_o$, so folgt $\nu < \nu_o$ oder $\mu < \mu_o$, also $a_\nu b_\mu \in \mathfrak{m} \; \forall \lambda < \nu_o + \mu_o$

d.h. $v(fg) \geq v(f) + v(g)$.

Ist $\lambda = \nu_o + \mu_o$ und $\nu \neq \nu_o$, so folgt ebenfalls $\nu < \nu_o$ oder $\mu < \mu_o$, also $a_\nu b_\mu \in \mathfrak{m}$.

Ist $\nu = \nu_o$ und $\mu = \mu_o$, so folgt, $a_{\nu_o} \cdot b_{\mu_o} \notin \mathfrak{m}$.

Insgesamt folgt $\sum_{\lambda = \nu_o + \mu_o} a_\nu b_\mu \notin \mathfrak{m}$, also $v(fg) \leq v(f) + v(g)$,

womit $v(fg) = v(f) + v(g)$ bewiesen ist.

(1.8) Sei $0 \neq \mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal.

Dann sei $v(\mathfrak{b}) := \{ v(f) / f \in \mathfrak{b}, f \notin \mathfrak{m}B \} \subseteq N^n$.

Dann gilt:

Lemma 2

Es existieren $\mu_1 < \ldots < \mu_m \in N^n$ und $D_1, \ldots, D_m \subseteq N^n$ mit:

$$v(\mathfrak{b}) = \bigcup_{i=1}^{m} (\mu_i + D_i)$$

ist eine disjunkte Zerlegung von $v(\mathfrak{b})$.

Beweis:

Zunächst sei bemerkt, daß $v(\mathfrak{b})$ ein Halbgruppenideal in $\mathbb{N}^n$ ist, d.h. es gilt: $v(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$ und $v(\mathfrak{b}) + \mathbb{N}^n \subseteq v(\mathfrak{b})$.

Halbgruppenideale sind endlich erzeugt.

Es existiert also eine endliche Menge $E \subseteq \mathbb{N}^n$ mit

$$v(\mathfrak{b}) = \bigcup_{\mu \in E} (\mu + \mathbb{N}^n) = \bigcup_{i=1}^{m} (\mu_i + \mathbb{N}^n).$$

Definiert man $D_i := \{ \nu \in \mathbb{N}^n \mid \nu + \mu_i \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} (\mu_j + \mathbb{N}^n) \}$, so

folgt die Behauptung des Lemmas.

(1.9) Satz 2 (Weierstraßscher Vorbereitungssatz für Ideale).

Sei $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal mit $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}B = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$.

Sei $v(\mathfrak{b}) = \bigcup_{i=1}^{m} \mu_i + D_i$ eine disjunkte Zerlegung von $v(\mathfrak{b})$ mit

$\mu_1 \prec \ldots \prec \mu_m$ und $D := \mathbb{N}^n \setminus v(\mathfrak{b})$.

Sei $V := \{ f \in B / f = \sum_{\nu \in D} a_\nu X^\nu \}$ und $V_i := \{ f \in B / f = \sum_{\nu \in D_i} a_\nu X^\nu \}$.

Dann gilt: Es existieren eindeutig bestimmte $\omega_1, \ldots, \omega_m \in B$ mit:

(1) $\omega_i = X^{\mu_i} + h_i$ mit $h_i \in V$, $v(h_i) > \mu_i$,

(2) $V_1 \omega_1 \oplus_A \ldots \oplus_A V_m \omega_m = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \oplus_A V = B$.

Beweis:

Der Fall $\mathfrak{b} = B$ ist trivial. Sei also $\mathfrak{b} \neq B$.

Wegen $\bigcup_{i=1}^{m} \mu_i + D_i = v(\mathfrak{b})$ existieren $\omega_i \in \mathfrak{b}$ mit

$$\omega_i = a_{\mu_i} X^{\mu_i} + h_i \quad \text{mit } v(h_i) > \mu_i \quad \text{und } a_{\mu_i} \notin \mathfrak{m} .$$

Ohne Einschränkung sei $a_{\mu_i} = 1$, also $\omega_i = X^{\mu_i} + h_i$.

Nach Satz 1 gilt dann:

$$V_1 \omega_1 \oplus_A \ldots \oplus_A V_m \omega_m \oplus_A V = B.$$

Ich zeige nun, daß (2) gilt.

Zu zeigen bleibt: $\mathfrak{b} \cap V = (0)$; die restlichen Behauptungen folgen dann unmittelbar.

Sei $r \in \mathfrak{b} \cap V$. Ich zeige: Für alle $n \in N$ gilt: $r \in \mathfrak{m}^n \mathfrak{b}$.

Induktion nach n. Der Induktionsanfang ist trivial.

Sei $n \geq 1$ und $r \in \mathfrak{m}^{n-1} \mathfrak{b}$.

Dann ist $r = \sum_{i=1}^{s} c_i b_i$ mit $c_i \in \mathfrak{m}^{n-1}$ und $b_i \in \mathfrak{b}$.

Nach Satz 1 zerlege ich

$$b_i = \sum_{j=1}^{m} q_{ij} \omega_j + r_i \quad \text{mit } q_{ij} \in V_j \quad \text{und } r_i \in V.$$

Wegen $b_i \in \mathfrak{b}$ und $\omega_j \in \mathfrak{b}$ gilt $r_i \in \mathfrak{b}$.

Angenommen $r_i \notin \mathfrak{m}B$. Dann ist $v(r_i) \in v(\mathfrak{b}) \cap D = \emptyset$. Widerspruch!

Also ist $r_i \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}B = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$.

Damit gilt:

$$r = \sum_{i=1}^{s} c_i b_i = \sum_{i=1}^{s} c_i \left(\sum_{j=1} q_{ij} \omega_j \right) + \sum_{i=1}^{s} c_i r_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{s} c_i q_{ij} \right) \omega_j + \sum_{i=1}^{n} c_i r_i .$$

Hierbei sind $\sum_{i=1}^{s} c_i q_{ij} \in V_j$ und $\sum_{i=1}^{s} c_i r_i \in V$.

Wegen $r \in V$ und der Eindeutigkeit einer Zerlegung der obigen Art gilt: $r = \sum_{i=1}^{s} c_i r_i$.

Da $c_i \in \mathfrak{m}^{n-1}$ und $r_i \in \mathfrak{m}\mathfrak{b}$ ist, folgt $r \in \mathfrak{m}^n \mathfrak{b}$.

Wegen $\bigcap_{n \in N} \mathfrak{m}^n \mathfrak{b} = 0$ folgt nun r=0, also die Behauptung.

Der erste Teil des Beweises gilt für alle $\varkappa_i \in \mathfrak{b}$ mit:

$$\varkappa_i = X^{\mu_i} + k_i \quad \text{und} \quad v(k_i) > \mu_i .$$

Ich zerlege nun: $k_i = b_i + h_i$ mit $b_i \in \mathfrak{b}$ und $h_i \in V$.

Sei nun : $\omega_i := X^{\mu_i} + h_i$.

Dann gilt: $v(k_i) = \min (v(b_i), v(h_i))$, also $v(h_i) > \mu_i$,

und $\omega_i = X^{\mu_i} + h_i = X^{\mu_i} + k_i - b_i = \varkappa_i - b_i$.

Somit erfüllen $\omega_1, \ldots, \omega_m$ die Teile (1) und (2) des Satzes.

Sei $(\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_m)$ ein zweites System, das den Satz 2 erfüllt.

Dann gilt: $\tilde{\omega}_i - \omega_i = X^{\mu_i} + \tilde{h}_i - X^{\mu_i} - h_i = \tilde{h}_i - h_i \in \mathfrak{b} \cap V = 0$,

also $\tilde{\omega}_i = \omega_i$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Also sind die $\omega_1, \ldots, \omega_m$ eindeutig bestimmt.

(1.10) Bemerkungen zu Satz 2:

Bemerkung 1: Satz 2 ist eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes.

Sei $B := A[\![X]\!]$ der formale Potenzreihenring über A in einer Unbestimmten.

ω heißt Weierstraßpolynom, wenn es von der Form $\omega = X^s + a_{s-1} X^{s-1} + \ldots + a_o$ mit $a_i \in \mathfrak{m}$ für alle $0 \leq i \leq s-1$ ist.

Korollar Sei $f \in B$ mit $f \notin \mathfrak{m}B$ und $s := v(f)$.

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Tupel (q, ω), so daß q ein invertierbares Element von B ist, ω ein Weierstraßpolynom vom Grade s und

$f = q \cdot \omega$ gilt .

Beweis:

Sei $\mathfrak{b} := Bf$. Dann gilt $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}B = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$.

Ist nämlich $g = bf \in \mathfrak{m}B$, so ist $b \in \mathfrak{m}B$, da $f \notin \mathfrak{m}B$ und $\mathfrak{m}B$ ein Primideal ist. Also ist $g \in \mathfrak{m}\mathfrak{b}$.

Nach Satz 2 existiert genau ein $\omega = X^s + h$ mit $h \in \bigoplus_{i=0}^{s-1} AX^i$

und $v(h) \leq s$ und $\mathfrak{b} = B\omega$.
Die Eigenschaften von h bedeuten, daß ω ein Weierstraßpolynom vom Grade s ist.
Wegen $\mathfrak{b} = B\omega$ existiert ein $q \in B$ mit $f = q\omega$.
Da $v(f) = s = v(\omega)$ gilt, also $v(q) = 0$, ist q ein invertierbares Element von B.

Bemerkung 2: Satz 2 überträgt sich unmittelbar auf den konvergenten Fall.

Bemerkung 3: Es gilt:
$B/\mathfrak{b}$ ist flacher A-Modul genau dann, wenn $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}B = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$ gilt.

Beweis:

Sei $R := B/\mathfrak{b}$.
Dann ist die folgende Sequenz von A-Moduln exakt:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{b} \longrightarrow B \longrightarrow R \longrightarrow 0 .$$

Also ist auch die folgende Sequenz von A-Moduln exakt:

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(k,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(k,R) \longrightarrow \mathfrak{b} \otimes_A k \longrightarrow B \otimes_A k \longrightarrow R \otimes_A k \longrightarrow 0.$$

Nun ist B ein flacher A-Modul und damit ist
$\mathrm{Tor}_1^A(k,B) = 0$.
Außerdem ist $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}B = \mathfrak{m}\mathfrak{b}$ gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{b} \otimes_A k \longrightarrow B \otimes_A k \quad \text{ist injektiv.}$$

Also folgt:

$$\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}B = \mathfrak{m}\mathfrak{b} \Longleftrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(k,R) = 0 .$$

Nach dem "lokalen Kriterium der Flachheit" ist $\mathrm{Tor}_1^A(k,R) = 0$ äquivalent damit, daß R flacher A-Modul ist.

§ 2. Die Länge des Differentialmoduls einer endlichen Algebra.

(2.1) Sei $k[\![X_1,\ldots, X_n]\!]$ der formale Potenzreihenring über einem Körper k in n Unbestimmten.
Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[\![X_1,\ldots, X_n]\!]$ ein Ideal und $A = \frac{k[\![X_1,\ldots X_n]\!]}{\mathfrak{a}}$ die zugehörige Restklassenalgebra.
Zusätzlich sei $\mathfrak{a}$ ein $(X_1,\ldots,X_n)$ - primäres Ideal, so daß A eine endliche k-Algebra ist (die Vektorraumdimension von A als k-Vektorraum ist endlich).
Sei $D_k(A)$ der Differentialmodul zu A.
Falls das Ideal $\mathfrak{a}$ von $f_1,\ldots f_n \in k[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ erzeugt wird und $df_i := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial X_n}\right)$ ist, gilt:

$$D_k(A) = \frac{A^n}{Adf_1 + \ldots + Adf_m} .$$

Dahergilt: Ist A eine endliche k-Algebra, so ist $D_k(A)$ ein endlicher k-Vektorraum.
Mein Ziel ist es, die Vektorraumdimensionen von $D_k(A)$ und A miteinander zu vergleichen.
In den zwei folgenden Fällen bereitet es keine Schwierigkeiten, die Dimension des Differentialmoduls zu berechnen.

(2.2) Sei die Einbettungsdimension von A : Dim A = 1.
Ist $\dim_k A = l$, so ist $A = \frac{k[\![X]\!]}{(X^l)}$.

Dann gilt:

Falls die Charakteristik von k l nicht teilt,

ist: $D_k(A) = \dfrac{k[\![X]\!]}{X^{l-1}}$, da $dX^l = l\,X^{l-1}\,dX$ ist.

Teilt die Charakteristik von k l, so ist: $D_k(A) \cong A$.

Also:

$$\dim_n D_k(A) = \begin{cases} \dim_k A & \text{, falls char } k \nmid \dim_k A \\ \dim_k A - 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

(2.3) Ich erinnere an folgende Definitionen:

Ein Element $f = \sum_{\nu \in N^n} a_\nu X^\nu \in k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$

heißt homogen vom Typ $(m_1, \ldots, m_m)$,

$m_i \in N_+ :\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \nu_i$ ist konstant für alle $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in N^n$ mit $a_\nu \neq 0$.

$A = \dfrac{k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]}{\mathfrak{a}}$ heißt quasihomogen, wenn es positive ganze Zahlen m_i, $1 \leq i \leq n$, gibt, so daß $\mathfrak{a}$ von Elementen, die homogen von Typ $(m_1, \ldots, m_n)$ sind, erzeugt wird.

Dann gilt bekanntlich:

Satz 3

Ist $A = \dfrac{k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]}{\mathfrak{a}}$ quasihomogen und $\mathfrak{a} \subseteq (X_1, \ldots, X_n)^2$, $n \geq 1$,

so gilt: $\dim_n D_k(A) \geq \dim_k A$

Beweis

Für die universelle k-Derivation von A:

$$d_A : A \longrightarrow D_k(A)$$

$$f \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}\, dX_i$$

gilt: Kern $d_A = k$, falls A quasihomogen ist.

Sei $P := k[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$, $m_p := (X_1,\ldots,X_n)$.

Zu zeigen ist:

Ist $f \in m_p$ mit $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i \in P\, d\mathfrak{a}$, so folgt $f \in \mathfrak{a}$.

Gilt $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i \in P\, d\mathfrak{a}$, so existieren $\omega_i \in \mathfrak{a}$,

$0 \leq i \leq n$ mit:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_o}{\partial X_i} dX_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \quad dX .$$

Da $\mathfrak{a}$ quasihomogen ist, gilt für alle $g \in \mathfrak{a}$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i X_i \frac{\partial g}{\partial X_i} = m(g)\, g$$

mit geeignetem $m(g) \in N_+$ ($m(g)$ ist der Grad von g).

Es folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i X_i \frac{\partial f}{\partial X_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i X_i \frac{\partial \omega_o}{\partial X_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i X_i \omega_i =$$

$$= m(\omega_o)\, \omega_o + \sum_{i=1}^{n} m_i X_i \omega_i \in \mathfrak{a} .$$

Sei nun $f = g + r$ mit $g \in \mathfrak{a}$ und $r = \sum_{\nu \notin V(\mathfrak{a})} a_\nu X^\nu$

eine Zerlegung nach Satz 2.

Dann folgt $\sum_{i=1}^{n} m_i X_i \frac{\partial r}{\partial X_i} \in \mathfrak{a}$.

Andererseits gilt: $\sum_{i=1}^{n} m_i X_i \frac{\partial r}{\partial X_i} = \sum_{\nu \notin V(\mathfrak{a})} m(\nu)\, a_\nu X^\nu$

mit $m(\nu) = \sum_{i=1}^{n} m_i \nu_i$.

Also folgt $m(\nu) \cdot a_\nu = 0$

Wegen $f \in m_p$ folgt $r \in m_p$, also $m(\nu) \neq 0$.

Damit folgt stets $a_\nu = 0$, also $r = 0$, d.h. $f \in \mathfrak{a}$.

Da $d_A(k) = 0$ gilt, folgt damit Kern $d_A = k$.

Damit ist : $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k$ Bild $d_A = \dim_k A - 1$.

Ist $\mathfrak{a} \subseteq (X_1,\ldots,X_n)^2$, so folgt $X_1 dX_n \notin P\,d\,\mathfrak{a}$

da $X_1\,d\,X_n \notin P\,d\,(X_1,\ldots,X_n)^2$.

Außerdem liegt $X_1\,d\,X_n$ nicht im Bild von d_A.

Also folgt : $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A$.

(2.4) Es sei $P := k[\![X,Y]\!]$ der formale Potenzreihenring in zwei Unbestimmten über einem Körper k.

Sei wieder $\mathfrak{a} \subseteq k[\![X,Y]\!]$ ein (X,Y)- primäres Ideal und $A := \dfrac{k[\![X,Y]\!]}{\mathfrak{a}}$.

Sei $D_k(A) := \dfrac{P^2}{Pd\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\,d\,P}$ der universelle Differentialmodul.

Satz 4

Es gilt: $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A - 1$.

Beweis:

Auf N^2 sei durch $(\mu_1, \nu_2) \leq (\mu_1, \mu_2)$: $(\nu_2 < \mu_2$ oder $(\nu_2 = \mu_2$ und $\nu_1 \leq \mu_1))$ eine Ordnung definiert, die die Eigenschaften von (1.2) erfüllt.

Das Halbgruppenideal $v(\mathfrak{w}) = \{v(f) \mid f \neq 0,\ f \in \mathfrak{w}\}$ von $\mathfrak{w}$ ist dann:

$$v(\mathfrak{w}) = \bigcup_{i=0}^{l-1} (n_i, i) + \mathbb{N} \times 0 + (0,1) + \mathbb{N}^2$$

mit $0 = n_l \leq \ldots \leq n_0$.

Nach Satz 2 existieren dann eindeutig bestimmte Erzeugende $\omega_i \in \mathfrak{w}$ ($0 \leq i \leq l$) mit:

(1) $\omega_i = Y^i g_i$ mit $g_i = X^{n_i} + Yh_i$ und $Y^{i+1}h_i \in V = \{f \in P / f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^2 \setminus v(a)} a_\nu X^\nu\}$

(2) $\omega_i = \sum_{j=i+1}^{l} q_{ij}\ \omega_j$ mit

$q_{ij} \in k[\![X]\!]\ \forall j < l$ und $q_{il} \in P$.

Aus Gradgründen folgt aus (2) $X^{n_i - n_{i+1}}\ \omega_{i+1} =$

$= Y\omega_i - \sum_{j=i+2}^{l} q_{ij}\ \omega_j$.

Da die Sequenz

$$0 \longrightarrow \frac{Pd\,\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}P^2} \longrightarrow (\frac{P}{\mathfrak{w}})^2 \longrightarrow D_k(\frac{P}{\mathfrak{w}}) \longrightarrow 0 \text{ exakt ist,}$$

genügt es, $\dim_k \frac{Pd\,\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}P^2} \leq \dim_k \frac{P}{\mathfrak{w}}$ zu zeigen.

Sei $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} : Y = \{ f \in P \mid f \cdot Y \in \mathfrak{a} \}$

Ich zeige dann:

$$g_{i+1} Y^i dg_i \in \mathfrak{a} dP + \mathfrak{b} dY + k \cdot X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1} dX$$

$\forall\ 0 \leq i \leq l-1$

Es gilt nämlich:

$$g_{i+1} Y^i dg_i = g_{i+1} Y^i d(X^{n_i} + Y h_i) =$$

$$= g_{i+1} Y^i (n_i X^{n_i-1} dX + Y dh_i + h_i dY) =$$

$$= n_i X^{n_i-1} Y^i g_{i+1} dX + g_{i+1} Y^{i+1} dh_i + h_i g_{i+1} Y^i dY .$$

Nun ist $g_{i+1} Y^{i+1} = \omega_{i+1} \in \mathfrak{a}$ und $g_{i+1} Y^i dY \in \mathfrak{b} dY$.

Zu zeigen bleibt also:

$$X^{n_i-1} Y^i g_{i+1} \in \mathfrak{a} + (X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1}) \quad \forall\ 0 \leq i \leq l-1$$

Ich zeige die Behauptung durch Induktion.

Für $i=l-1$ ist $X^{n_{l-1}-1} \cdot Y^{l-1} g_l =$

$$X^{n_{l-1}-1} \cdot Y^{l-1} \in \mathfrak{a} + (X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1}).$$

Der Induktionsschritt: Gelte $X^{n_j - 1} Y^j g_{i+1} \in$

$$\in \mathfrak{a} + (X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1}) \quad \forall\ j \geq i .$$

Über die Relationen der ω_i weiß man, daß

$$X^{n_{i-1}-n_i} \omega_i = Y \omega_{i-1} - \sum_{j=i+1}^{l} q_{i-1,j} \omega_j \quad \text{gilt.}$$

Es folgt:

$$X^{n_{i-1}-1} Y^{i-1} g_i = X^{n_{i-1}} \omega_{i-1} - \sum_{j=i+1}^{l} q_{i-1,j} X^{n_i - n_{j-1}} \cdot$$

$$\cdot (X^{n_{j-1}-1} Y^{j-1} g_j)$$

Da nach Induktionsvoraussetzung

$$X^{n_{j-1}-1} Y^{j-1} g_j \in \mathfrak{a} + (X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1}) \quad \forall j \geq i+1$$

ist, gilt $X^{n_{i-1}-1} Y^{i-1} g_i \in \mathfrak{a} + (X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1})$.

Nun gilt: $g_{i+1}\, d\omega_i = g_{i+1}\,(Y^i dg_i + iY^{i-1} g_i dY) \in$

$$\in \mathfrak{b}\cdot dY + k\, X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1}\, dX + \mathfrak{a} P^2,$$

und $$Y\, d\omega_i \equiv X^{n_i - n_{i+1}}\, d\omega_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{l} q_{i,j}\, d\omega_j \pmod{\mathfrak{a} P^2};$$

Außerdem gilt $$g_{i+1}\, d\omega_i = X^{n_{i+1}}\, d\omega_i + h_{i+1} Y\, d\omega_i .$$

Es gilt $\mathfrak{b} = (g_1, .., Y^{i-1} g_i, ..., Y^{l-1})$.

Die eine Richtung " $\geq$ " ist klar. " $\subseteq$ ": Sei $f \in \mathfrak{b}$
also $f \cdot Y \in \mathfrak{a} \Rightarrow f \cdot Y = \sum_{i=0}^{l} q_i\, \omega_i \Rightarrow$

$f \cdot Y = q_o (X^{n_o} + Y h_o) + \sum_{i=1}^{l} q_i\, \omega_i$. Dann ist

$q_o X^{n_o} \in (Y) \cdot P$ und da andererseits $q_o \in k[\![X]\!]$ gilt,
folgt $q_o = 0$. Also ist $f = \sum_{i=1}^{l} q_i\, Y^{i-1} g_i$.

Daher wird $Pd\mathfrak{a} \,/\, \mathfrak{a} \cdot P^2$ von den Restklassen von

$$\begin{matrix} d\omega_o, \ldots, & X^{n_1-1}\, d\omega_o \\ \vdots & \vdots \\ d\omega_i, \ldots, & X^{n_{i+1}-1}\, d\omega_i \\ \vdots & \end{matrix}$$

$$d\omega_{l-2},\ \ldots,\ X^{n_{l-1}-1}\ d\omega_{l-2}$$

sowie
$$g_1\,dY,\ \ldots,\ X^{n_o-n_1-1}\ g_1\,dY$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$Y^{i-1}g_i\,dY,\ \ldots,\ X^{n_{i-1}-n_i-1}\ Y^{i-1}\ g_i\,dY$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$Y^{l-1}\,dY,\ \ldots,\ X^{n_{l-2}-n_{l-1}-1}\ Y^{e-1}\,dY$$

und $X^{n_{l-1}-1}\ Y^{l-1}\,dX$ als k-Untervektorraum erzeugt.

Damit folgt:

$$\dim_k \frac{Pd\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}P^2} = \sum_{i=1}^{l-1}(n_i) + \sum_{i=1}^{l-1}(n_{i-1}-n_i) + 1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{l-1}(n_i) + n_o + 1 = \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} + 1$$

(2.5) Satz 5 Gilt $\mathfrak{a} \subseteq (X,Y)^2$, so folgt: $\dim_k D_k(\frac{P}{\mathfrak{a}}) \geq \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}}$.

Beweis:

Sei $n_2=0$. Dann kann man ohne Einschränkung $l \geq n_o$ annehmen(Sonst macht man eine Koordinatentransformation $X \longleftrightarrow Y$ und man gewinnt ein Ideal mit $n_2 \neq 0$). Dann ist $l=2$, $n_o \leq 2$, also $\mathfrak{a} = (X,Y)^2$ oder $\mathfrak{a} = (X^2,Y^2)$ und die Behauptung folgt durch Ausrechnen beider Fälle. (Beide Ideale werden von homogenen Elementen erzeugt.)

Sei $n_2 \geq 0$. Ich zeige, daß in diesem Falle $\frac{P d\omega}{\alpha P^2}$ von

den im vorherigen Satz genannten Elementen ohne $g_1 \, d\,Y$ erzeugt wird. Im Folgenden rechnen wir in $\frac{P^2}{\alpha P^2}$.

Für alle $j \in N$ gilt:

Die Restklasse von $X^j \, d\omega_i$ liegt in dem von den Restklassen von

$$\begin{matrix} d\omega_i, \ldots, X^{n_{i+1}-1} \, d\omega_i \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ d\omega_{l-2}, \ldots, X^{n_{l-1}-1} \, d\omega_{l-2} \end{matrix}$$

sowie

$$\begin{matrix} Y^{i-1} \, g_i dY, \ldots, X^{n_{i-1}-n_i-1} Y^{i-1} \, g_i \, dY \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Y^{l-1} dY, \ldots, X^{n_{l-2}-n_{l-1}-1} Y^{l-1} d\,Y \end{matrix}$$

und $X^{n_{l-1}-1} \, Y^{l-1} \, d\,X$

erzeugten k- Untervektorraum, wie man aus dem Beweis des letzen Satzes leicht entnimmt.

Ferner gilt:

$$X^{n_2} \, d\omega_1 = g_2 \, d\omega_1 - Yh_2 d\,\omega_1 = g_2 Y dg_1 + g_1 g_2 dY - Yh_2 d\,\omega_1$$

Da $n_2 \geq 1$ gilt, wird also

$$\sum_{j \geq n_2} k \, X^j d\omega_1 \text{ von } \begin{matrix} d\omega_2, \ldots, X^{n_3-1} \, d\omega_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ d\omega_{l-2}, \ldots, X^{n_{l-1}-1} d\omega_{l-2} \end{matrix}$$

sowie

$$\begin{matrix} Xg_1 dY, \ldots, X^{n_0-n_1-1} \, g_1 \, dY \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{matrix}$$

$$Y^{l-1}dY, .., X^{n_{l-2}-n_{l-1}-1} Y^{l-1} dY$$

und $X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1} dX$ erzeugt.

$$X^{n_1} d\omega_o = g_1 \, d\omega_o - Y h_1 \, d\omega_o =$$

$$= g_1 (n_o X^{n_o-1} dX + h_o \, dY + Y \, dh_o) - Y h_1 \, d\omega_o$$

$$= n_o X^{n_o-1} g_1 \, dX + g_1 h_o \, dY + \omega_1 \, dh_o - Y h_1 \, d \, _o .$$

Gemäß dem im letzten Satz Bewiesenen gilt:

$$X^{n_o-1} g_1 \in \mathfrak{r} + (X^{n_{l-1}-1} Y^{l-1})$$

und $Y \, d\omega_o$ wird von $\sum_{\substack{1 \le i \le l \\ j_i \in N}} k \quad X^{j_i} \cdot d\omega_i$ erzeugt.

Also genügt es, $g_1 h_o \, dY$ zu betrachten.

Wegen $\mathfrak{a} \subseteq (X,Y)^2$ gilt $\omega_o \in (X,Y)^2$, also $h_o \in (X,Y)$.

Daher wird

$$g_1 h_o dY \quad \text{von} \quad \begin{matrix} X g_1 dY, .., X^{n_o-n_1-1} g_1 dY \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Y^{l-1} dY, .., X^{n_{l-2}-n_{l-1}-1} Y^{l-1} dY \end{matrix}$$

modulo $\mathfrak{r} \cdot P^2$ erzeugt.

Also habe ich $\dim_k \frac{Pd\mathfrak{r}}{\mathfrak{r} P^2_p} \le \dim_k \frac{P}{\mathfrak{r}}$ und

damit $\dim \, _k D_k \, (\frac{P}{\mathfrak{r}}) \ge \dim_k \frac{P}{\mathfrak{r}}$ für jedes Ideal $\mathfrak{r} \subseteq (X,Y)^2$ bewiesen.

(2.3) Sei (A, m_A, k) ein lokaler noetherscher Ring

und $R = A[\![X,Y]\!]/\mathfrak{a}$ eine endliche A-Algebra.

$D_A(R)$ sei der relative universelle Differentialmodul von R.

Für einen A-Modul V, sei $\mu_A(V)$ die minimale Erzeugendenzahl als A-Modul.

Dann gilt:

1. Korollar (1) $\mu_A(D_A(R)) \geq \mu_A(R) - 1$

(2) Gilt $\mathfrak{a} + m_A R \subseteq (X,Y)^2 + m_A R$, so folgt $\mu_A(D_A(R)) \geq \mu_A(R)$.

Beweis:

Es gilt:

$$\mu_A(D_A(R)) = \dim_{A/m_A} \frac{D_A(R)}{m_A D_A(R)} = \dim_{A/m_A} D_{A/m_A}\left(\frac{R}{m_A}R\right)$$

und

$$\mu_A(R) = \dim_{A/m_A} \frac{R}{m_A \cdot R} .$$

Mit den Sätzen (3) udn (4) folgt dann die Behauptung.

(2.6) Auf $\mathbb{N}^n$ sei die umgekehrt lexikographische Ordnung definiert, d.h. $\nu < \mu :\Leftrightarrow \nu_i < \mu_i$, $\nu_j = \mu_j \ \forall i < j \leq n$.

Dann gilt:

Satz 6

Sei $\mathfrak{a} \subseteq P := k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ ein Ideal mit $v(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{n} (m_i \varepsilon_i + \mathbb{N}^n)$ mit $m_i \geq 2$ und

$\varepsilon_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \in \mathbb{N}^n$ (die 1 steht an der i-ten Stelle).

Dann gilt:

$$\dim_k D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{w}}\right) = \begin{cases} \dim_k \frac{P}{\mathfrak{w}} - 1 & , \text{falls } n=1 \\ \dim_k \frac{P}{\mathfrak{w}} & , \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

Durch Induktion anch n .

Die Behauptung ist für $n \leq 2$ bereits bewiesen (Satz3,4,5).

Der Induktionsschritt:

Wegen $v(\mathfrak{w}) = \bigcup_{i=1}^{n} (m_i \varepsilon_i + \mathbb{N}^n)$ existieren $\omega_i \in \mathfrak{w}$

mit $\omega_i = X_i^{m_i} + h_i$ mit $v(h_i) > m_i \varepsilon_i$ und

$$h_i = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n \setminus v(\mathfrak{w})} a_\nu X^\nu \quad .$$

$\omega_1, \ldots, \omega_m = X_n^{m_n}$ erzeugen $\mathfrak{w}$; $\quad k[\![X_1,\ldots,X_n]\!]/\mathfrak{w}$

ist also ein spezieller vollständiger Durchschnitt.

Sei $\mathfrak{w}_j := (X_n^j) \cap \mathfrak{w}$ für alle $0 \leq j \leq m_n$.

Sei $h_i = h_i^{(o)} + h_i^{(1)} \cdot X_n$ mit $h_i^{(o)} \in k[\![X_1,\ldots,X_{n-1}]\!]$

und $\omega_i^{(o)} := X_i^{m_i} + h_i^{(o)}$ für alle $1 \leq i \leq n-1$,

sowie $\mathfrak{w}^{(o)} := (\omega_i^{(o)})$.

Es gilt: $\mathfrak{w}_j = (\omega_i X_n^j)_{1 \leq i \leq n-1} \qquad \forall 0 \leq j \leq m_n - 1$

und $\mathfrak{w}_j = (1)$ sonst.

Ist $\omega \in \mathfrak{w}_j$, so folgt $X_n d\omega = d\omega X_n - \omega dX_n \in Pd\mathfrak{a}_{j+1} + \mathfrak{w} P^n$.

Weiter folgt: $\omega_i^{(o)} \, d\omega_1 \, X_n^j = \omega_i \, d\omega_1 \, X_n^j -$

$$- X_n h_i^{(1)} \, d\omega_1 \, X_n^j \in P \, d\mathfrak{w}_{j+1} + \mathfrak{w} \cdot P^n$$

für alle j und alle $1 \leq i, 1 \leq n-1$.

Also gilt:

$$Pd\mathfrak{a}_j \subseteq \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{\nu \in D_o} k X^\nu \, d\omega_1 \, X_n^j + \mathfrak{w} P^n + \sum_{l \neq j} P d\mathfrak{a}_l \quad \text{mit}$$

$D_o := N^{n-1} \setminus V(\mathfrak{w}^{(o)})$.

Sei $P_o := k[\![X_1, \ldots, X_{n-1}]\!]$.

Es ist $P_o \, d\mathfrak{w}^{(o)} = V + \mathfrak{w}^{(o)} P^{n-1}$ mit $V \cong \dfrac{P_o \, d\mathfrak{w}^{(o)}}{\mathfrak{w}^{(o)} P_o^{n-1}}$.

Es folgt $Pd\mathfrak{a}_{m_n - 1} \subseteq V + \mathfrak{w} \cdot P^n$.

Da die Induktionsvoraussetzung auf $\mathfrak{a}^{(o)}$ angewandt werden kann, gilt $\dim_k V \leq (n-1) \dim_k \dfrac{P_o}{\mathfrak{w}^{(o)}}$.

Insgesamt folgt:

$$Pd\mathfrak{a} \subseteq \sum_{j=0}^{m_n - 2} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{\nu \in D_o} k \cdot X^\nu \, d\omega_1 \, X_n^j + V + \sum_{\nu \in D_o} k X^\nu dX_n^{m_n} + \mathfrak{w} P^n.$$

Also gilt:

$$\dim_k \frac{Pd\mathfrak{w}}{\mathfrak{w} P^n} \leq (m_n - 1)(n-1) \dim_k \frac{P_o}{\mathfrak{w}^{(o)}} + (n-2) \dim_k \frac{P_o}{\mathfrak{w}^{(o)}} +$$

$$\dim_k \frac{P_o}{\mathfrak{w}^{(o)}}.$$

Also:

$$\dim_k \frac{Pd\mathfrak{w}}{\mathfrak{w} P^n} \leq m_n (n-1) \dim_k \frac{P_o}{\mathfrak{w}^{(o)}}.$$

Nun ist $\dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} = m_n \dim_k \frac{P_o}{\mathfrak{a}(o)}$, woraus sich die Behauptung ergibt.

(2.7) Sei $R = \frac{k[\![X_1,\ldots,X_n]\!]}{\mathfrak{a}}$ ein vollständiger Druchschnitt der (Krullschen) Dimension $\dim R = 1$.

Dann gilt:

Satz 7 Es existiert ein $x \in m_R$ mit:

$$(1)\quad \dim_k \frac{D_k(R)}{x\ D_k(R)} \geq \dim_k \frac{R}{x\ R}$$

(2) Ist $\mathfrak{a} \subseteq (X_1,\ldots,X_n)^2$, so gilt sogar:

$$\dim_k \frac{D_k(R)}{xD_k(R)} \geq \dim_k \frac{R}{xR} + n-1 .$$

Beweis:

Man kann annehmen, daß R endlicher $k[\![X_n]\!]$ - Modul ist. Ich zeige die Behauptung für $x := X_n$.

Sei wieder N^n umgekehrt lexikographisch geordnet.

$V(\mathfrak{a})$ sei wie in (1.6) definiert.

Sei $\mathfrak{a} = (f_1,\ldots,f_{n-1})$.

Dann kann man $f_i = X^{\nu_i} + h_i$ mit $v(h_i) > \nu_i$ schreiben.

Es gilt $\nu_i \in N^{n-1} \times 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n-1$, denn sonst wäre

$\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{a} + (X_n)$ ein $(X_1,\ldots,X_n)$-primäres Ideal,

das von weniger als n Elementen erzeugt wird.

Sei nun $h_i = h_1^{(o)} + X_n h_i^{(1)}$ mit $h_i^{(o)} \in k[\![X_1,\ldots,X_{n-1}]\!]$

und $f_i^{(o)} = X^{\nu_i} + h_i^{(o)}$.

Sei $\mathfrak{r}$ das von $f_i^{(o)}$, $1 \leq i \leq n-1$ in $k[\![X_1,\ldots,X_{n-1}]\!]$ erzeugte Ideal und

$D = N^{n-1} \setminus v(\mathfrak{r})$.

Trivialerweise gilt $d\mathfrak{a}^2 \subseteq \mathfrak{a} P^n$ und außerdem

ist $d X_n \mathfrak{r} \subseteq X_n P^n + \mathfrak{a} P^n$.

Also ist

$$Pd\mathfrak{a} \subseteq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\nu \in D} k\, X^{\nu}\, df_i + X_n \cdot P^n + \mathfrak{a} P^n.$$

Es folgt:

$$\dim_k \frac{Pd\mathfrak{a} + X_n P^n}{X_n P^n + \mathfrak{a} P^n} \leq (n-1) \text{ Anzahl } D = (n-1) \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a} + X_n}.$$

Wegen $\dfrac{D_k(R)}{X_n D_k(R)} = \dfrac{P^n}{Pd\mathfrak{a} + X_n P^n}$ und $\dfrac{R}{X_n R} = \dfrac{P}{\mathfrak{a} + X_n}$

folgt die erste Behauptung.

Ist zusätzlich $\mathfrak{a} \subseteq (X_1,\ldots,X_n)^2$, so gilt Folgendes:

Es ist $d f_i = df_i^{(o)} + X_n dh_i^{(1)} + h_i^{(1)}\, dX_n$ modulo $(\mathfrak{a} + X_n)P^n$

zu betrachten. Zusätzlich kann man $h_i^{(1)} \in k[\![X_1,\ldots,X_{n-1}]\!]$

voraussetzen.

Wegen $\mathfrak{w} \subseteq (X_1,\ldots,X_n)^2$ gilt $f_i^{(o)} \in (X_1,..,X_{n-1})^2$ und $h_i^{(1)} \in (X_1,\ldots,X_{n-1})$.
Ist nun $g \in \mathfrak{w}: (X_1,\ldots,X_{n-1})$, $g \notin \mathfrak{w}$ so annuliert g das oben betrachtete Element modulo $(\mathfrak{w} + X_n)\, P^n$.
Also gibt es ein $0 \neq g \in \sum_{\nu \in D} k\, X^\nu$ das als Erzeugendes

$g\, d\, f_i$ überflüssig ist.

Damit gilt $\dim_k \dfrac{P\, d\mathfrak{w} + X_n P^n}{X_n P^n + \mathfrak{w} P^n} \leq (n-1)\,(\dim_k \dfrac{P}{\mathfrak{w} + X_n} - 1)$

(2,8) Bemerkung

Um die gesuchte Dimensionsformel mit meinen Methoden für ein Ideal $\mathfrak{w} \subseteq P := k[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ zu bekommen, benötigt man für die Ideale

$$\mathfrak{w}_i := \{ f \in k[\![X_1,\ldots,X_{n-1}]\!] \;/\; \exists\, h \in k[\![X_1,..,X_n]\!] \text{ mit } f X_n^i + h X_n^{i+1} \in \mathfrak{w}\} \subseteq P_o := k[\![X_1,\ldots,X_{n-1}]\!]$$ eine

Abschätzung $\dim_k \dfrac{\mathfrak{w}_i}{\mathfrak{w}_i^2} \leq (n-1) \dim_k \dfrac{P_o}{\mathfrak{w}_i}$.

Ist $\mathfrak{w}_1 = (1)$ und $\mathfrak{w}_{l-1} \neq (1)$, so muß außerdem für $\mathfrak{w}_{l-1}$

noch $\dim_k \dfrac{P_o\, d\mathfrak{w}_{l-1}}{\mathfrak{w}_{l-1} P_o^{n-1}} \leq (n-2) \dim_k \dfrac{P_o}{\mathfrak{w}_{l-1}}$ gelten,

was gleichbedeutend mit $\dim_k D_k (\dfrac{P_o}{\mathfrak{a}_{l-1}}) \geq \dim_k \dfrac{P_o}{\mathfrak{w}_{l-1}}$ ist.

Die Abschätzung $\dim_k \dfrac{\mathfrak{w}_i}{\mathfrak{w}_i^2} \leq (n-1) \dim_k \dfrac{P_o}{\mathfrak{w}_i}$ ist

aber vermutlich falsch, falls $\mathfrak{w}_i$ kein Hauptklassenideal

ist. Daher sind mit diesen Methoden keine allgemeineren Resultate als die Sätze 4, 6 und 7 zu bekommen.

(2.9) Herzog vermutet in [7], daß $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq n \dim_k P/\mathfrak{a}$ für jedes $(X_1,\ldots,X_n)$- primäres Ideal gilt. Er zeigt dies dort für n=2 und in [8] für glättbare Ideale.

Mit anderen Methoden zeige ich:

Satz 8

Ist $\mathfrak{a} \subseteq P := k[\![X,Y]\!]$ ein (X,Y)- primäres Ideal, so gilt:

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq 2 \dim_k P/\mathfrak{a} .$$

Beweis:

Ich zeige die Behauptung durch Induktion nach $\dim_k P/\mathfrak{a}$.

Zu Beginn der Induktion betrachtet man $\mathfrak{a} = (X,Y)$.

Dann gilt: $\dim_k P/(X,Y)^2 = 3 = 3 \cdot 1 = 3 \dim_k P/(X,Y)$.

Der Induktionsschritt: Sei $\mathfrak{a} = (\omega_0,\ldots,\omega_l)$ und ω_i Weierstraßerzeugende wie in Satz 4.

Sei $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} : (Y)$.

Ich zeige zunächst:

$$\mathfrak{a}^2 \subseteq (\omega_0^2, \omega_0\omega_1) P + Y^2 \cdot \omega_0 \cdot (\mathfrak{b} : Y) + Y^2 \cdot \mathfrak{b}^2 .$$

Ist nämlich $f \in \mathfrak{a}^2$, so folgt:

$$f = \sum_{0 \leq i \leq j \leq l} q_{ij} \omega_i \omega_j = \omega_0 \left(\sum_{j=0}^{l} q_{0j} \omega_j\right) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq l} q_{ij} \omega_i \omega_j =$$

$$= q_{oo}\ \omega_o^2 + q_{o1}\ \omega_o\ \omega_1 + \omega_o Y^2 \left(\sum_{j=2}^{l} q_{oj} Y^{j-2} g_j\right) +$$

$$+ Y^2 \sum_{1 \le i \le j \le l} q_{ij}\ Y^{i-1}\ g_i\ Y^{j-1} g_j \ .$$

Da $\sum_{j=2}^{l} q_{oj}\ Y^{j-2}\ g_j \in \mathfrak{b} : Y$ und

$\sum_{1 \le i \le j \le l} q_{ij}\ Y^{i-1} g_i\ Y^{j-1} g_j \in \mathfrak{b}^2$ gilt,

folgt die Behauptung.

Nun gilt:

$$\dim_k \frac{P}{\mathfrak{v}^2} \geq \dim_k \frac{P}{(\omega_o^2,\ \omega_o\omega_1) + Y^2 \cdot \omega_o \cdot (\mathfrak{b} : Y) + Y^2\mathfrak{b}^2} =$$

$$= \dim_k \frac{P}{(\omega_o^2, \omega_o\omega_1, Y^2)} + \dim_k \frac{(\omega_o^2, \omega_o\omega_1, Y^2)}{(\omega_o^2,\ \omega_o\omega_1) + Y^2 \cdot (\omega_o \cdot (\mathfrak{b} : Y) + \mathfrak{b}^2)} =$$

$$= 3n_o + n_1 + \dim_k \frac{(Y^2)}{Y^2 \cdot (\omega_o (\mathfrak{b} : Y) + \mathfrak{b}^2)} =$$

$$= 3n_o + n_1 + \dim_k \frac{P}{\omega_o \cdot (\mathfrak{b} : Y) + \mathfrak{b}^2} =$$

$$= 3n_o + n_1 + \dim_k \frac{P}{\mathfrak{b}^2} - \dim_k \frac{\omega_o (\mathfrak{b} : Y) + \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{b}^2} \ .$$

Da $X^{n_{i-1}-n_i}\ g_i Y^{i-2} \omega_o = g_{i-1} Y^{i-2} \omega_o - \left(\sum_{j=i-1}^{l} q_{ij}\ g_j Y^{i-2}\right) \omega_o$

und $\omega_o \in \mathfrak{b}$ gilt, wird

$\frac{(\mathfrak{b} : Y)\ \omega_o + \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{b}^2}$ von den Restklassen (mod $\mathfrak{b}^2$) von

$$\begin{matrix} g_2 \omega_o & \ldots\ldots & X^{n_1 - n_2 - 1} g_2\ \omega_o \\ \vdots & & \vdots \\ g_i Y^{i-2} \omega_o, & \ldots, & X^{n_{i-1} - n_i - 1}\ g_i\ Y^{i-2}\ \omega_o \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

$Y^{l-2}\,\omega_o, \ldots, X^{n_{l-1}-n_l-1}\,Y^{l-2}\,\omega_o$ erzeugt.

Damit folgt: $\dim_k \dfrac{(\mathfrak{b}:Y)\,\omega_o + \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{b}^2} \leq n_1$.

Also gilt:

$$\dim_k P/\mathfrak{m}^2 \geq 3n_o + n_1 + \dim_k P/\mathfrak{b}^2 - n_1 = 3n_o + \dim_k P/\mathfrak{b}^2$$

$$\geq 3\,n_o + 3\,\dim_k P/\mathfrak{b} = 3\,\dim_k P/\mathfrak{m} \quad ,$$

da nach Induktionsvoraussetzung

$$\dim_k P/\mathfrak{b}^2 \geq 3\,\dim_k P/\mathfrak{b} \quad \text{gilt.}$$

§ 3. Weitere Längenabschätzungen

(3.1) Sei weiter $\mathfrak{a} \subseteq k[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ ein $(X_1,\ldots,X_n)$- primäres Ideal.

Im Folgenden sei m die Ordnung von $\mathfrak{a}$, d.h.

$m := \max\{k \in \mathbb{N} \;/\; \mathfrak{a} \subseteq (X_1,\ldots,X_n)^k\}$.

Zusätzlich sei $l := \min\{k \in \mathbb{N} \;/\; (X_1,\ldots,X_n)^k \subseteq \mathfrak{a}\}$.

Satz 9

Es gilt: $\dim_k D_k\left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) \geq \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} + (n-1)\dim_k \frac{P}{(X_1,..,X_n)^m} +$

$+ 1 - \dim_k \frac{(X_1,\ldots,X_n)^m}{(X_1,\ldots,X_n)^{m+1}} -$

$- \dim_k \operatorname{Kern} d_A$.

Beweis:

Es sei $B := \frac{P}{(X_1,\ldots,X_n)^m}$ und $A := \frac{P}{\mathfrak{a}}$.

Dann gilt: $\dim_k \frac{D_k(A)}{\text{Bild } d_A} \geq \dim_k \frac{D_k(B)}{\text{Bild } d_B}$

da $P\,d\mathfrak{a} + \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n \setminus v(\mathfrak{a})} k\,dX^\nu \subseteq P\,d(X_1,\ldots,X_n)^m +$

$+ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n \setminus v((X_1,\ldots,X_n)^m)} k\,dX^\nu .$

Nun ist $\dim_k \dfrac{D_k(B)}{\text{Bild } d_B} = n \dim_k \dfrac{P}{(X_1,..,X_n)^m} -$

$$- \dim_k \frac{P\, d\,(X_1,\ldots,X_n)^m}{(X_1,\ldots,X_n)^m \quad P^n}$$

$$- \left(\dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots,X_n)^m} - 1\right) =$$

$$= (n-1) \dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots,X_n)^m} + 1 - \dim_k \frac{(X_1,..,X_n)^m}{(X_1,\ldots X_n)^{m+1}} .$$

Also ist:

$$\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A + (n-1) \dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots,X_n)^m} + 1 -$$

$$-\dim_k \frac{(X_1,\ldots,X_n)^m}{(X_1,\ldots,X_n)^{m+1}} - \dim_k \text{Kern } d_A .$$

Korollar 1

Gilt $\dim_k \text{Kern } d_A \leq (n-1) \dim_k \dfrac{P}{(X_1,\ldots X_n)^m} + 1 -$

$$- \dim_k \frac{(X_1,\ldots,X_n)^m}{(X_1,\ldots,X_n)^{m+1}} ,$$

so folgt $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A.$

Korollar 2

Gilt $\dim_k A \leq n \dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots,X_n)^m} -$

$$- \dim_k \frac{(X_1,\ldots,X_n)^m}{(X_1,\ldots,X_n)^{m+1}} ,$$

so folgt $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A$.

Beweis:

Es gilt $\dim_k \operatorname{Kern} d_A \leq \dim_k \frac{(X_1,\ldots X_n)^m}{\mathfrak{w}} + 1$.

(3.2) Satz 10

Es gilt: $\dim_k D_k(\frac{P}{\mathfrak{w}}) \geq (n+1)\dim_k \frac{P}{\mathfrak{w}} - \dim_k \frac{P}{(X_1,..,X_n)^{l+1}}$.

Beweis:

Ist $\mathfrak{w} = (X_1,\ldots,X_n)^l$, so gilt $\dim_k D_k(\frac{P}{\mathfrak{w}}) =$

$$= n \dim_k \frac{P}{\mathfrak{w}} - \dim_k \frac{\mathfrak{w}}{(X_1,\ldots,X_n)^{l+1}}$$

und es folgt die Behauptung.

Sei obige Formel für alle Ideale $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{w} \supsetneq \mathfrak{b} \supseteq (X_1,..X_n)^l$ bewiesen.

Ist $\mathfrak{w} \neq (X_1,\ldots,X_n)^l$ so existiert ein $\omega \in \mathfrak{w}$, $\omega \notin (X_1,\ldots X_n)\mathfrak{w}$ und $\omega \notin (X_1,\ldots X_n)^l$.

Dann existiert ein Ideal $\mathfrak{b} \supseteq (X_1,..,X_n)^l$
mit $\mathfrak{w} = \mathfrak{b} + (\omega)$ und $X_i \cdot \omega \in \mathfrak{b}\ \forall 1 \leq i \leq n$.
Dann ist $P d\mathfrak{w} \subseteq k\, d\omega + \sum_{i=1}^{n} k\ dX_i + P\, d\mathfrak{b}$,

also $\dim_k \dfrac{P\, d\mathfrak{w}}{P\, d\mathfrak{b}} \leq n+1$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\dim_k \frac{P\, d\mathfrak{b}}{(X_1,\ldots,X_n)^l dP} \leq (n+1) \dim_k \frac{\mathfrak{b}}{(X_1,\ldots,X_n)^l} +$$

$$+ \dim_k \frac{(X_1,\ldots X_n)^l}{(X_1,\ldots,X_n)^{l+1}} .$$

Es folgt $\dim_k \dfrac{P\, d\mathfrak{w}}{(X_1,\ldots X_n)^l\, P^n} \leq (n+1) \dim_k \dfrac{\mathfrak{w}}{(X_1,\ldots X_n)^l} +$

$$+\dim_k \frac{(X_1,\ldots,X_n)^l}{(X_1,\ldots X_n)^{l+1}}$$

und damit die Behauptung.

Korollar 1

Ist $\dim_k \dfrac{P}{\mathfrak{w}} \geq \dfrac{1}{n} \dim_k \dfrac{P}{(X_1,\ldots X_n)^{l+1}}$,

so folgt: $\dim_k D_k\left(\dfrac{P}{\mathfrak{w}}\right) \geq \dim_k \dfrac{P}{\mathfrak{w}}$.

Korollar 2

Gilt $l \leq \dfrac{(n^2+n+m)(m-1)}{n+m}$,

so ist $\dim_k D_k \left(\dfrac{P}{\mathfrak{w}}\right) \geq \dim_k \dfrac{P}{\mathfrak{w}}$.

Beweis:

Aus $1 \leq \frac{(n^2+n+m)(m-1)}{n+m}$ folgt $(1-m+1)\frac{n+m}{m} \leq \frac{n^2(m-1)}{m}$.

Also gilt $\frac{(n+m)\cdot\ldots\cdot(n+1)}{m\cdot\ldots\cdot 1} \leq (1-m+1)\frac{n+m}{m} = \frac{n^2(m-1)}{m}$.

Damit ist $\frac{\binom{n+l}{l}}{\binom{n+m}{m}} \leq \frac{n^2(m-1)}{m}$

Da $\dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots X_n)^q} = \binom{n+q-1}{q-1}$ ist,

folgt daraus $\dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots X_n)^{l+1}} \leq n\,((n+1)\dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots X_n)^m} -$

$$- \dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots X_n)^{m+1}}\ ).$$

Mit dem Korollar 2 von Satz 9 und Korollar 1 von Satz 10 folgt dann die Behauptung.

(3.3) Sei A ein Ring und M ein A-Modul.

Sei $\bigwedge^i M$ die i-te äußere Potenz von M.

Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul.

Dann ist $\bigwedge^i (M/N) = \frac{\bigwedge^i M}{N_i}$,

wobei N_i der von allen Elementen $a_1 \wedge \ldots \wedge a_i, a_j \in M$.

erzeugte Untermodul von $\bigwedge^i M$ ist, für den mindestens ein a_j in N liegt.

Es sei $\bigwedge^n D_k(P/\mathfrak{a})$ die n-te äußere Potenz von $D_k(P/\mathfrak{a})$. Wird $\mathfrak{a}$ von $f_1,\ldots,f_m$ erzeugt, so gilt

$$D_k(A) = \frac{A^n}{U} \text{ mit } \quad U = \sum_{j=1}^{m} A\, df_j \quad .$$

Es folgt $\bigwedge^n D_k(A) = \frac{\bigwedge^n A^n}{U_n} \cong \frac{A}{V_n}$, wobei

V_n das von den partiellen Ableitungen der f_i in A erzeugte Ideal ist.
Anders ausgedrückt: Es ist $\bigwedge^n D_k(P/\mathfrak{a}) = P/\tilde{\mathfrak{a}}$,

$\tilde{\mathfrak{a}}$ das von den Elementen von $\mathfrak{a}$ und ihren partiellen Ableitungen erzeugte Ideal in P ist.

Satz 11 Sei char k = 0.

Es gilt:

$$\dim_k \frac{D_k(A)}{\text{Bild } d_A} \geq (n-1)\dim_k \bigwedge^n D_k(A) + \binom{n-1}{2} \quad ,$$

falls $\mathfrak{a} \subseteq (X_1,\ldots,X_n)^2$.

Beweis:

Durch Induktion nach $\dim_k A$.

Ist $\mathfrak{a} = (X_1,\ldots,X_n)^2$, so ist

$\dim_k D_k(A) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim_k \text{Bild } d_A = \dim_k A - \dim_k \text{Kern}_A =$

$= \dim_k A - 1 = n$, $\dim_k \bigwedge^n D_k(A) = \dim_k \frac{P}{(X_1,\ldots X_n)} = 1$

und es folgt die Behauptung.

Der Induktionsschritt:

Da A eine endliche k- Algebra ist, gilt

Anz $(\mathbb{N}^n \setminus \nu(\mathfrak{a})) < \infty$.

Sei $\mu := \max \{\nu \,/\, \nu \in \mathbb{N}^n \setminus \nu(\mathfrak{a})\}$; $\mathbb{N}^n$ sei wieder umgekehrt lexikographisch geordnet.

Dann gilt $X^\mu \notin \mathfrak{a}$. Wegen $\mu + \varepsilon_i \in \nu(\mathfrak{a})$ existiert ein reduziertes Element $\sum_{\nu \notin \nu(\mathfrak{a})} a_\nu X^\nu \in P$ mit

$$\nu > \mu + \varepsilon_i$$

$$X^{\mu+\varepsilon_i} + \sum_{\substack{\nu \notin \nu(\mathfrak{a}) \\ \nu > \mu + \varepsilon_i}} a_\nu X^\nu \in \mathfrak{a} .$$

Aus der Definition von μ folgt $\{\nu \in \mathbb{N}^n \,/\, \nu > \mu + \varepsilon_i ,$

$$\nu \in \mathbb{N}^n \setminus \nu(\mathfrak{a})\} = \emptyset .$$

Also ist $X^{\mu+\varepsilon_i} \in \mathfrak{a} \quad \forall\ 1 \le i \le n.$

Sei $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} + (X^\mu)$.

Wegen $\dim_k \frac{P}{\mathfrak{b}} = \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} - 1$ erfüllt $B := \frac{P}{\mathfrak{b}}$

die Induktionsvoraussetzung.

Es gilt also

$$\dim_k \frac{D_k(B)}{\text{Bild } d_B} \ge (n-1) \dim_k \bigwedge^n D_k(B) + \binom{n-1}{2} .$$

Es ist $\frac{D_k(B)}{\text{Bild } d_B} = \frac{D_k(A)}{\text{Bild } d_A + X^\mu D_k(A)}$

$$\text{und } \bigwedge^{n} L_k(B) \cdot \frac{P}{\widetilde{\mathfrak{b}}} = \frac{P}{\widetilde{\mathfrak{a}} + \left(X^{\mu}, \frac{\partial}{\partial X_1} X^{\mu}, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n} X^{\mu} \right)} .$$

Es gilt $\widetilde{\mathfrak{b}} = \widetilde{\mathfrak{a}} + \left(\mu_n X^{\mu - \varepsilon_n} \right)$; $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Zunächst ist $X^{\mu} \in \widetilde{\mathfrak{a}}$, da $(\mu_i + 1) X^{\mu} = \frac{\partial}{\partial X_i} (X^{\mu + \varepsilon_i})$

gilt und $X^{\mu + \varepsilon_i} \in \mathfrak{a}$.

Ist $\mu_i = 0$, so ist $\frac{\partial}{\partial X_i} X^{\mu} = 0 \in \widetilde{\mathfrak{a}}$.

Ist $\mu_i \neq 0$, so ist $\mu + \varepsilon_j - \varepsilon_i > \mu$ für alle $j \geq i$.

Also ist $\mu + \varepsilon_j - \varepsilon_i \in v(\mathfrak{a})$ und wie eben folgt

sogar $X^{\mu + \varepsilon_j - \varepsilon_i} \in \mathfrak{a}$.

Also gilt $\frac{\partial}{\partial X_j} X^{\mu + \varepsilon_j - \varepsilon_i} = (\mu_j + 1) X^{\mu - \varepsilon_i} \in \widetilde{\mathfrak{a}}$.

Nun gilt:

$$\dim_k \frac{D_k(A)}{\text{Bild } d_A} = \dim_k \underbrace{\frac{D_k(B)}{\text{Bild } d_B}} + \dim_k \frac{X^{\mu} D_k(A) + \text{Bild } d_A}{\text{Bild } d_A} .$$

$$\geq (n-1) \dim_k \bigwedge^{n} D_k(B) + \binom{n-1}{2} + \dim_k \left(\frac{X^{\mu} D_k(A) + \text{Bild } d_A}{\text{Bild } d_A} \right)$$

$$\geq (n-1) \dim_k \bigwedge^{n} D_k(A) + \binom{n-1}{2} + \dim_k \frac{(X^{\mu} D_k(A) + \text{Bild } d_A}{\text{Bild } d_A)}$$

$$- (n-1) \dim_k \frac{\widetilde{\mathfrak{a}} + \frac{\partial}{\partial X_n} X^{\mu}}{\widetilde{\mathfrak{a}}} .$$

Zu zeigen bleibt: $\dim_k \frac{X^{\mu} D_k(A) + \text{Bild } d_A}{\text{Bild } d_A} \geq (n-1) \dim_k \frac{\widetilde{\mathfrak{a}} + \frac{\partial}{\partial X_n} X^{\mu}}{\widetilde{\mathfrak{a}}}$.

Es gilt $X^{\mu} d X_n = 0$ in $D_k(A)$.

Wegen $\mu + \varepsilon_n - \varepsilon_i > \mu \; \forall 1 \leq i \leq n-1$, gilt $X^{\mu+\varepsilon_n-\varepsilon_i} \in \mathfrak{o}$,

also folgt $dX^{\mu+\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X^{\mu+\varepsilon_n-\varepsilon_i} dX_{ij}$ also

$$\mu_n X^{\mu} dX_n \in P \, d\mathfrak{o} + \mathfrak{o} P^n .$$

Ferner gilt : $dX^{\mu} = 0$ in $D_k(A)$ folgt $X^{\mu} D_k(A) +$

$$+ A \, dX^{\mu} = 0 ,$$

denn $X^{\mu} dX_i = dX^{\mu+\varepsilon_i} - X_i \, dX^{\mu}$ und $X^{\mu+\varepsilon_i} \in \mathfrak{o}$.

Gilt $\dim_k \left(\frac{X^{\mu} D_k(A) + \text{Bild} d_A}{\text{Bild} \, d_A} \right) \geq n-1$, so ist nichts zu zeigen.
Ist aber $\dim_k \left(\frac{X^{\mu} D_k(A) + \text{Bild} d_A}{\text{Bild} \, d_A} \right) < n-1$, so existiert ein i
mit $1 \leq i \leq n-1$ und $X^{\mu} dX_i \in dP + \mathfrak{o} P^n$

Es existieren also $\omega_j \in \mathfrak{o}$, $1 \leq j \leq n$, $\omega_o \in P$ mit:

$$X^{\mu} dX_i = d\omega_o + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dX_i .$$

Dann ist $\frac{\partial}{\partial X_n} X^{\mu} = \frac{\partial}{\partial X_n} \frac{\partial \omega_o}{\partial X_i} + \frac{\partial \omega_i}{\partial X_n}$

und $0 = \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial \omega_o}{\partial X_n} + \frac{\partial \omega_n}{\partial X_i}$.

Also $\frac{\partial}{\partial X_n} X^{\mu} = \frac{\partial \omega_i}{\partial X_n} - \frac{\partial \omega_n}{\partial X_n} \in \tilde{\mathfrak{o}}$.

Damit gilt: Ist $\dim_k \left(\frac{X^\mu D_k(A) + \text{Bild}\, d_A}{\text{Bild}\, d_A}\right) < n-1$,

so folgt $\dim_k \frac{\widetilde{\mathfrak{w}} + \frac{\partial}{\partial X_n} X^\mu}{\widetilde{\mathfrak{w}}} = 0$

Das war noch zu zeigen.

Korollar 1

Gilt $\dim_k \text{Kern}\, d_A \leq (n-1) \dim_k \bigwedge^n D_k(A) + \binom{n-1}{2}$,

so folgt:

$$\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A.$$

Korollar 2

Es gilt:

$$\dim_k D_k(A) \geq n \dim_k \bigwedge^n D_k(A) + \binom{n}{2}.$$

Beweis:

Der Beweis gleicht dem von Satz 11.

Man beachte, daß aus $dX^\mu \in Pd\,\mathfrak{w} + \mathfrak{w}P^2$ unmittelbar $\frac{\partial}{\partial X_n} X^\mu \in \widetilde{\mathfrak{w}}$ folgt.

Satz 12

Sei char k = 0.

Dann gilt: $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k \bigwedge^{n-1} D_k(A) \quad \forall\, n \geq 3$

Beweis:

Induktion nach $\dim_k A$.

Ist A = k, so ist $D_k(A) = 0 = \bigwedge^{n-1} D_k(A)$.

Der Induktionsschritt:

Eine Ordnung auf $\mathbb{N}^n$ sei wieder definiert durch:

$\nu \prec \mu$, wenn $|\nu| < |\mu|$ oder ($|\nu| = |\mu|$ und $\nu \prec \mu$ in der umgekehrt lexikographischen Ordnung).

Nach einer geeigneten Koordinatentransformation ist, wegen char k =0, $v(\mathfrak{w})$ ein striktes Halbgruppenideal, d.h. es gilt:

$\mu \in v(\mathfrak{w}) \Rightarrow \mu + \varepsilon_i - \varepsilon_j \in v(\mathfrak{w}) \; \forall j \geq i$ (siehe etwa [15] § 4 Lemma 1 oder [16]).

Ist $(X_1,\ldots,X_n)^l \subseteq \mathfrak{w}$, aber $(X_1,\ldots,X_n)^{l-1} \not\subseteq \mathfrak{w}$,

so ist $X_n^{l-1} \in \mathfrak{w}: (X_1,\ldots,X_n)$, aber $X_n^{l-1} \notin \mathfrak{w}$.

Es ist nämlich $(l-1)\varepsilon_n = \max(\mathbb{N}^n \setminus v(\mathfrak{w}))$, denn sonst ist $(l-1)\varepsilon_n \in v(\mathfrak{w})$, also $v((X_1,\ldots,X_n)^{l-1}) \in v(\mathfrak{w})$ und damit $(X_1,\ldots,X_n)^{l-1} \subseteq \mathfrak{w}$. Widerspruch!

Also gilt $X_n^{l-1} \notin \mathfrak{w}$.

Andererseits ist $X_i X_n^{l-1} \in (X_1,\ldots,X_n)^l \subseteq \mathfrak{w}$.

Sei nun $\mathfrak{b} := \mathfrak{w} + (X_n^{l-1})$; $B := \frac{P}{\mathfrak{b}}$.

Dann gilt: $\dim_k B = \dim_k A - 1$.

Es ist $D_k(B) = \dfrac{D_k(A)}{\mathrm{Ad}X_n^{l-1} + X_n^{l-1} D_k(A)}$

und $\bigwedge^{n-1} D_k(B) = \dfrac{\bigwedge^{n-1} D_k(A)}{dX_n^{l-1} \wedge \bigwedge^{n-2} D_k(A) + X_n^{l-1} \bigwedge^{n-1} D_k(A)}$

Nun gilt: $\dim_k D_k(A) = \dim_k D_k(B) + \dim_k(\mathrm{Ad}X_n^{l-1} + X_n^{l-1} D_k(A)) \geq$

$$\geq \dim_k \bigwedge^{n-1} D_k(B) + \dim_k (\mathrm{Ad}X_n^{l-1} + X_n^{l-1} D_k(A)) =$$

$$= \dim_k \bigwedge^{n-1} D_k(A) - \dim_k (dX_n^{l-1} \bigwedge^{n-2} D_k(A) + X_n^{l-1} \cdot \bigwedge^{n-1} D_k(A)) +$$

$$+ \dim_k (A\, dX_n^{l-1} + X_n^{l-1} D_k(A)) .$$

Als k- Untervektorraum von $D_k(A)$ wird

$(AdX_n^{l-1} + X_n^{l-1} D_k(A))$ von dX_n^{l-1}, $X_n^{l-1} dX_1, \ldots, X_n^{l-1} dX_{n-1}$

erzeugt, da $X_i dX_n^{l-1} = dX_i X_n^{l-1} - X_n^{l-1} dX_i$.

Als k-Untervektorraum von $\bigwedge^{n-1} D_k(A)$ wird

$(dX_n^{l-1} \wedge \bigwedge^{n-2} D_k(A) + X_n^{l-1} \bigwedge^{n-1} D_k(A))$ erzeugt von

$X_n^{l-1} dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_{n-1}$, $X_n^{l-2} \widehat{dX_1} \wedge \ldots \wedge dX_n, \ldots,$

$X_n^{l-2} dX_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dX_{n-1}} \, dX_n$.

(Das unter $\widehat{\ }$ befindliche Element wird ausgelassen).

Ist $\mathfrak{J} := \{j_1, \ldots j_{i-2}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und

$dX_{\mathfrak{J}} := dX_{j_1} \wedge \ldots \wedge dX_{j_{n-2}}$,

so gilt nämlich

$X_n^{l-1} dX_i \wedge dX_{\mathfrak{J}} = 0$, falls $i \overset{\text{oder}}{\vee} n \in \mathfrak{J}$ und $dX_n^{l-1} \wedge dX_{\mathfrak{J}} = 0$,

falls $n \in \mathfrak{J}$.

Gilt $\dim_k (AdX_n^{l-1} + X_n^{l-1} D_k(A)) = n$, so ist nichts zu zeigen.

Gilt $\dim_k (A\, dX_n^{l-1} + X_n^{l-1} D_k(A)) = 0$ (Was genau dann der Fall ist, wenn $dX_n^{l-1} = 0$ in $D_k(A)$ ist),

so gilt Folgendes:

Es existieren $\omega_o, \ldots, \omega_n \in \Omega$ mit

$$dX_n^{l-1} = d\omega_o + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dX_i$$

und daher für alle $1 \leq j \leq n-1$

$$(l-1)\, X_n^{l-2} \, dX_n \wedge dX_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dX_j} \ldots \wedge dX_{n-1} =$$

$$= d\omega_o \wedge dX_1 \ldots \wedge \widehat{dX_j} \wedge \ldots dX_{n-1}$$

$$+ \omega_j \, dX_j \wedge dX_1 \ldots \wedge \widehat{dX_j} \wedge \ldots \wedge dX_{n-1}$$

$$+ \omega_n \cdot d X_n \wedge dX_1 \ldots \wedge \widehat{dX_j} \ldots \wedge dX_{n-1} \quad .$$

Also gilt $\forall\, 1 \leq j \leq n-1$:

$$X_n^{l-2} \, dX_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dX_j} \wedge \ldots \wedge dX_n = 0 \text{ in } \bigwedge^{n-1} D_k(A)$$

Da außerdem $\lambda_o, \ldots, \lambda_n \in \Omega$ mit

$$X_n^{l-1} \, dX_1 = d\lambda_o + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, dX_i \quad \text{existieren} \vee \text{gilt},$$

folgt $X_n^{l-1} \, dX_1 \wedge dX_2 \wedge \ldots \wedge dX_{n-1} =$

$$= d\lambda_o \wedge dX_2 \ldots \wedge d X_{n-1} + \lambda_1 \, dX_1 \wedge dX_2 \ldots \wedge dX_{n-1} + \lambda_n dX_n \wedge dX_2 \wedge \ldots \wedge dX_{n-1}$$

also $X_n^{l-1} \, dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_{n-1} = 0$ in $\bigwedge^{n-1} D_k(A)$

Insgesamt folgt $\dim_k \left(dX_n^{l-1} \wedge \bigwedge^{n-2} D_k(A) + X_n^{l-1} \bigwedge^{n-1} D_k(A) \right) =$

$$= 0.$$

Ist $1 \leq \dim_k (A\, dX_n^{l-1} + X_n^{l-1} D_k(A)) \leq n-1$,
so existiert ein $1 \leq i \leq n-1$ und es existieren
$\omega_o, \ldots, \omega_n \in \mathfrak{m}$ mit

$$X_n^{l-1}\, dX_i = d\,\omega_o + \sum_{p=1}^{n} \omega_p\, dX_p \quad .$$

Wie eben folgt $X_n^{l-1}\, dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_{n-1} = 0$ in $\bigwedge^{n-1} D_k(A)$.

Außerdem gilt in $\bigwedge^2 D_k(P)$:

$$(l-1) X_n^{l-2}\, dX_i \wedge dX_n = d_1(X_n^{l-1}\, dX_i) = d_1(d\,\omega_o + \sum_{p=1}^{n} \omega_p dX_p) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} d\,\omega_p \wedge dX_p .$$

Es folgt $X_n^{l-2}\, dX_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dX_j} \wedge \ldots \wedge X_n = 0$ in $\bigwedge^{n-1} D_k(A)$
für alle $1 \leq j \leq n-1$ mit $j \neq i$.

Damit ist $\dim_k (dX_n^{l-1} \wedge \bigwedge^{n-2} D_k(A) + X_n^{l-1} \bigwedge^{n-1} D_k(A)) \leq$
≤ 1.

(3.4) Von Interesse ist auch eine Abschätzung für die Vektorraumdimension des Derivationenmoduls einer endlichen k-Algebra. Allerdings ist die Struktur des Derivationenmoduls für diese Fragestellung noch unzugänglicher als die des Differentialmoduls.

Eine Abschätzung gewinnt man noch im folgenden Fall.

Satz 13

Sei $A = \dfrac{k[\![X_1,\ldots,X_n]\!]}{\mathfrak{a}}$ quasihomogen.

Dann gilt:

$$\dim_k D_k(A)^* \geq \dim_k A - \dim_k (0 : \mathfrak{m}_A).$$

Beweis:

Es ist $D_k(A)^* = \{ v = (v_1,\ldots v_n) \in A^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \in \mathfrak{a} \quad \forall f \in \mathfrak{a} \}$

Sei $V := A \begin{pmatrix} m_1 & & X_1 \\ \vdots & & \\ m_n & & X_n \end{pmatrix}$, wenn A quasihomogen vom Typ $(m_1,\ldots,m_n)$ ist.

Dann gilt: $V \subseteq D_k(A)^*$,

denn $\sum_{i=1}^{n} m_i X_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \in P \cdot f \subseteq \mathfrak{a} \quad \forall f \in \mathfrak{a}$.

Außerdem ist $\dim_k V = \dim_k A - \dim_k 0 : \mathfrak{m}_A$.

(3.5) Ich erinnere an die Definition des i-ten Fittingideals $\mathcal{F}_i(M)$ eines endlichen A-Moduls M.

Ist $x_1,\ldots x_n$ ein Erzeugendensystem von M und $U \subseteq A^n$ der Modul der Relation der x_i und $f_j = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, j\in}$ ein Erzeugendensystem von U, so wird $\mathcal{F}_i(U)$ von den n-i-Minoren der Matrix $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, j\in}$ erzeugt.

Das 0-te Fittingideal $\mathcal{F}_0(D_k(A))$ des A-Moduls $D_k(A)$ heißt die Kählersche Differente von A über k.

Nach Scheja-Storch [10] gilt für die Kählersche

Differente einer endlichen k-Algebra

$$\mathfrak{f}_0(D_k(A)) = \begin{cases} \mathrm{Ann}_A \mathfrak{m}_A & \text{, falls A vollständiger Durchschnitt ist und char k } \dim_k A \text{ nicht teilt.} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Sei M ein endlicher A-Modul und A artinsch. Die Frage ist, ob man die Längen $l(M)$ und $l\left(\frac{M}{\mathfrak{d}_0(M)}\right)$ vergleichen kann.

(3.6) A sei ein kommutativer Ring mit 1, der außerdem lokal und von endlicher Länge sei.

Sei e_i die Standardbasis des A^m (bzw. A^n).

Satz 14

Es sei φ: $\begin{array}{ccc} A^m & \longrightarrow & A^n \\ e_i & \longmapsto & f_i \end{array}$, $m \geq n$, eine A-lineare Abbildung.

Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $\pi_i : A^n \longrightarrow A^i$

durch $e_j \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls } 1 \leq j \leq n-i \\ e_j & \text{, falls } n-i < j \leq n \end{cases}$ definiert.

$\mathfrak{d}_i$ sei das von den i-ten Unterdeterminanten von $\pi_i \circ \varphi$ erzeugte Ideal in A.

Dann gilt: $$l(\text{Bild}\,\varphi) \leq l(\mathfrak{d}_1) + \sum_{i=1}^{n-1} l(\mathfrak{d}_{i+1} : \mathfrak{d}_i).$$

Beweis:

Induktion nach n.

Ist n=1, so gilt Bild $\varphi = \mathfrak{d}_1$.

Der Induktionsschritt:

Sei $\varphi_1 : A^m \longrightarrow A^{n-1}$ mit $\varphi_1 := \pi_{n-1} \circ \varphi$ und

$U_1 := \text{Bild}\,\varphi_1$, $U := \text{Bild}\,\varphi$.

Es gilt: $\pi_i \circ \varphi_1 = \pi_i \circ \pi_{n-1} \circ \varphi = \pi_i \circ \varphi$ für alle $1 \leq i \leq n-1$

Also folgt $\mathfrak{d}_i(U_1) = \mathfrak{d}_i(U)$ für alle $1 \leq i \leq n-1$.

Es gilt: $l(U) = l(U_1) + l(U \cap \text{Kern } \pi_{n-1})$, da $U_1 = \pi_{n-1}(U)$.

Wegen $l(U_1) \leq l(\mathfrak{A}_1) + \sum_{i=1}^{n-2} l(\mathfrak{A}_{i+1} : \mathfrak{A}_i)$ und

$U \cap \text{Kern } \pi_{n-1} = U \cap Ae_1$

genügt es, $l(U \cap Ae_1) \leq l(\mathfrak{A}_n : \mathfrak{A}_{n-1})$ zu zeigen.

Sei $\mathfrak{b} := \{a \in A \mid ae_1 \in U\}$. $\mathfrak{b}$ ist ein Ideal in A mit

$l(\mathfrak{b}) = l(U \cap Ae_1)$.

Ich zeige: $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{A}_n : \mathfrak{A}_{n-1}$.

Sei $b \in \mathfrak{b}$ beliebig. Sei d ein Minor der Ordnung n-1 der aus $\pi_{n-1}(f_1), \ldots, \pi_{n-1}(f_m)$ gebildeten Matrix. Dann existieren $i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1, \ldots, m\}$, so daß d eine Komponente von $e_1 \wedge f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_{n-1}}$ ist.

Wegen $b \in \mathfrak{b}$ gilt $b e_1 \in U$, also existieren $a_1, \ldots, a_n \in A$

mit $be_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$.

Es folgt:

$$be_1 \wedge f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_{n-1}} = \sum_{j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i_1,\ldots,i_{n-1}\}} a_j f_j \wedge f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_{n-1}}$$

Die Komponenten von $f_j \wedge f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_{n-1}}$ sind Elemente aus $\mathfrak{A}_n$.

Also folgt: $b\,d \in \mathfrak{A}_n$.

Bemerkung 1:

Die Ungleichung ist optimal.

Sei $A = \dfrac{k[\![X,Y]\!]}{(X^2,Y^2)}$ und $\varphi : A^4 \longrightarrow A^2$ die A-lineare Abbildung mit

$$e_1 \longmapsto Xe_1$$
$$e_2 \longmapsto Ye_1$$
$$e_3 \longmapsto Xe_2$$
$$e_4 \longmapsto Ye_2 \quad .$$

Dann ist: $l(A) = 4$ und $l(\text{Bild}\,\varphi) = 2l(A) - 2 = 6$.

Es ist: $\vartheta_1 = \mathfrak{m}_A$

$\vartheta_2 = (XY)$

und $\vartheta_2 : \vartheta_1 = \mathfrak{m}_A$.

Es folgt: $l(\vartheta_1) + l(\vartheta_2 : \vartheta_1) = 2\,l(\mathfrak{m}_A) = 6$.

Korollar 1

Sei A Gorensteinring , $\varphi : A^m \longrightarrow A^2$ A-linear.

ϑ das von den Hauptminoren der Matrix von φ erzeugte Ideal in A.

Dann gilt: $\vartheta = 0 \Rightarrow l(\text{Bild}\,\varphi) \leq l(A)$.

Beweis:

Nach Satz 6 gilt: $l(\text{Bild}\,\varphi) \leq l(\vartheta_1) + l(\vartheta_2 : \vartheta_1)$.

Hier ist $\vartheta_2 = \vartheta = 0$, also $l(\text{Bild}\,\varphi) \leq l(\vartheta_1) + l(0 : \vartheta_1)$.

Da A gorensteinsch ist, folgt $l(\vartheta_1) + l(0 : \vartheta_1) = l(A)$,

denn $l(0 : \vartheta_1) = l((\frac{A}{\vartheta_1})^*) = l(\frac{A}{\vartheta_1})$.

Korollar2

Ist $A = \dfrac{k[\![X,Y]\!]}{(f,g)}$ eine endliche k-Algebra

So gilt: $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A - 1$.

Beweis: Sei φ:
$$A^3 \longrightarrow A^2$$
$$e_1 \longmapsto df$$
$$e_2 \longmapsto Xdg$$
$$e_3 \longmapsto Ydg$$

Dann gilt $\mathfrak{d}=0$, da für die Kählersche Differente $\mathfrak{f}_0(D_k(A)) \subseteq \mathrm{Ann}_A \mathfrak{m}_A$ gilt. Da A als vollständiger Durchschnitt gorensteinsch ist, folgt $\dim_k \mathrm{Bild}\,\varphi = \dim_k A$. Ist U= Adf +Adg, so ist $\dim_k U \leq \dim_k \mathrm{Bild}\,\varphi + 1$, womit die Behauptung folgt.

Bemerkung 2

φ : $A^m \longrightarrow A^n$ ($m \geq n$) A-linear, $\mathfrak{d}$ das von den Hauptminoren der Matrix von φ erzeugte Ideal, dann gilt im Allgemeinen nicht:

$$l(\mathrm{Bild}\,\varphi) \leq (n-1)l(A) + l(\mathfrak{d}).$$

Im Beispiel von Bemerkung 1 ist:

$$l(\mathrm{Bild}\,\varphi) = 6 \quad \text{und} \quad (n-1)l(A)+l(\mathfrak{d})=4+1=5$$

Bemerkung 3

Aus dem Satz 14 kann man im Allgemeinen nicht $l(D_k(A)) \geq l(A)$ folgern.

Sei $\mathfrak{a} = (X^2-Y^2, Y^2-Z^2, XY, YZ, XZ) \subseteq k[\![X,Y,Z]\!]$ und $A = \dfrac{k[\![X,Y,Z]\!]}{\mathfrak{a}}$.

Dann ist:

$$D_k(A) = \frac{A^3}{\begin{pmatrix} 2X \\ -2Y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2Y \\ -2Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Z \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z \\ 0 \\ X \end{pmatrix}} .$$

Bei char $k \neq 2$ ist dann:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{m}_A$$
$$\mathfrak{A}_2 = (Z^2) \qquad \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{m}_A$$
$$\mathfrak{A}_3 = 0 \qquad \mathfrak{A}_3 : \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{m}_A .$$

Also $l(\mathfrak{A}_1) + l(\mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_1) + l(\mathfrak{A}_3 : \mathfrak{A}_2) = 3l(\mathfrak{m}_A) = 12$

und $(n-1)\ l(A) = 10$.

§ 4. Der De Rham-Komplex einer endlichen Algebra.

(4.1) Sei k ein Körper , $P := k[\![X_1,\ldots X_n]\!]$ und

$\mathfrak{a} \subsetneq P$ ein Ideal, sowie $A = P/\mathfrak{a}$ eine k-Algebra.

Mit $D_k(A)$ sei wieder der universelle Differentialmodul bezeichnet.

$\bigwedge^i D_k(A)$ sei der Modul der i-ten äußeren Differentialformen über A.

Es existiert dann genau eine Sequenz:

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{d_{-1}} A \xrightarrow{d_0} D_k(A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bigwedge^{r-1} D_k(A) \xrightarrow{d_{n-1}} \bigwedge^n D_k(A) \longrightarrow 0 ,$$

wobei d_{-1} die kanonische Einbettung von k in A ist

und

$$d_{i-1} : \bigwedge^{i-1} D_k(A) \longrightarrow \bigwedge^i D_k(A)$$

durch

$$\sum_{\nu \in \{1,\ldots,n\}^{i-1}} f_\nu \, dX_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dX_{\nu_{i-1}} \longrightarrow$$

$$\sum_{K=1}^{n} \sum_{\nu \in \{1,\ldots,n\}^{i-1}} \frac{\partial f}{\partial X_k} \, dX_k \wedge dX_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dX_{\nu_{i-1}}$$

gegeben ist.

Diese Sequenz ist ein Komplex, d.h. es gilt stets

Bild $d_{i-1} \subseteq$ Kern d_i .

(4.2) Bekannt istder folgende Satz (siehe [12]):

Satz 15

Es sei char k = 0 und A quasihomogen.

Dann gilt:

Die Sequenz $0 \longrightarrow k \xrightarrow{d_{-1}} A \xrightarrow{d_0} D_k(A) \xrightarrow{} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \bigwedge^n D_k(A) \longrightarrow 0$

ist exakt.

Beweisskizze:

Sei m_i das Gewicht des homogenen Elementes X_i .

Sei $e_{i-1}: \bigwedge^i D_k(A) \longrightarrow \bigwedge^{i-1} D_k(A)$

der durch $dX_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dX_{\nu_i} \longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1} m_{\nu_k} X_{\nu_k} dX_{\nu_1} \wedge \cdots \widehat{dX_{\nu_k}} \wedge \cdots \wedge dX_{\nu_i}$$

induzierte A-Homomorphismus.

Dann gilt $e_{i-1} \circ d_{i-1} = id_{\bigwedge^i D_k(A)}$ und $d_{i-1} \circ e_{i-1} = id_{\bigwedge^i D_k(A)}$.

Damit folgt die Behauptung.

(4.3) Ist A eine endliche, quasihomogene k-Algebra, so folgt aus der Exaktheit des De Rham-Komplexes

$$\mathcal{X}(A) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k \bigwedge^i D_k(A) - 1 = 0$$

Man kann nun fragen, ob für jede endliche Algebra A $\mathcal{X}(A) \geq 0$ ist.

Dies gilt nicht immer: $\mathcal{X}(A)$ kann sowohl positiv als auch negativ sein.

(4.4) 1. Beispiel ($\mathfrak{ae}(A) > 0$)

Sei $\mathfrak{M} := (X^2 + \frac{1}{3} Y^5,\ XY^4 + \frac{7}{5} Y^6) \subsetneq \mathbb{C}[\![X,Y]\!] =: P.$

$\mathrm{Pd}\,\mathfrak{M} / \mathfrak{M} P^2$ wird von

$$\begin{pmatrix} 2X \\ \frac{5}{3}Y^4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} Y^5 \\ \frac{7}{3} Y^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2XY \\ \frac{5}{3}Y^5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} Y^6 \\ \frac{7}{3} Y^7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2XY^2 \\ \frac{5}{3}Y^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2XY^3 \\ \frac{5}{3}Y^7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^4 \\ 4XY^3 + \frac{42}{5}Y^5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^5 \\ \frac{14}{5}Y^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^6 \\ \frac{14}{5} Y^7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y^7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

minimal erzeugt.

Es gilt $\tilde{\mathfrak{w}} = (X , Y^4)$.

Damit ist $\dim_{\mathbb{C}} P/\mathfrak{w} = 12$,

$\dim_{\mathbb{C}} D_{\mathbb{C}}(P/\mathfrak{w}) = 2 \cdot 12 - 10 = 14$,

$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^2 D_{\mathbb{C}}(P/\mathfrak{w}) = 4$.

Hier gilt :

$\varkappa(P/\mathfrak{w}) = 12 - 14 + 4 - 1 = 1 > 0$.

Berechnet man die Homologie des Komplexes, so gilt:

$\dim_{\mathbb{C}} H_0 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\text{Kern } d_0}{\text{Bild } d_{-1}} = 1$,

da Y^7 ein nichttriviales Element von Kern d_1 ist.
Sei $\omega_0 := X^2 + \frac{1}{3} Y^5$ und $\omega_1 := XY^4 + \frac{7}{5} Y^6$, dann gilt:

$$Y^6 \, dY = \frac{30}{7} \omega_0 \, dX + \frac{65}{7} \omega_1 \, dY - \frac{15}{7} X \, d\omega_0 - \frac{10}{7} Y \, d\omega_1 .$$

Dagegen ist $H_1 = \frac{\text{Kern } d_1}{\text{Bild } d_0} = 0$.

Von Interesse sein dürfte, daß in diesem Beispiel

$\text{Ann}_A \mathfrak{M}_A \subseteq \text{Kern } d_A$ gilt.

(4.5) 2. Beispiel ($\varkappa(A) < 0$)

$\mathfrak{w} = (X^3 + XY^5 + Y^7, X^2Y^7, XY^8, Y^9) \subseteq P := \mathbb{C}[\![X,Y]\!]$

$\frac{P d\mathfrak{w}}{\mathfrak{w} P^2}$ wird minimal von

$$\begin{pmatrix} 3X^2+Y^5 \\ 5XY^4+7Y^6 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -2XY^5 - 3Y^7 \\ 5X^2Y^4+7XY^6 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X^2Y^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3X^2Y+Y^6 \\ 5XY^5+7Y^7 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -2XY^6 - 3Y^8 \\ 5X^2Y^5 + 7XY^7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3X^2Y^2+Y^7 \\ 5XY^6+7Y^8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3X^2Y^3+Y^8 \\ 5XY^7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^2Y^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^2Y^5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^2Y^6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} XY^7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y^8 \\ 8XY^7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ Y^8 \end{pmatrix}$$ erzeugt.

Also gilt $\dim_{\mathbb{C}} \frac{Pd\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}P^2} = 13$

Es ist $\tilde{\mathfrak{a}} = (X^2 + \frac{1}{3}Y^5, XY^4 + \frac{5}{7}Y^6, Y^7)$.

Also:

$\dim_{\mathbb{C}} \frac{P}{\mathfrak{a}} = 7+8+9 = 24$

$\dim_{\mathbb{C}} D_{\mathbb{C}}(\frac{P}{\mathfrak{a}}) = 48-13 = 35$

$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^2 D_{\mathbb{C}}(\frac{P}{\mathfrak{a}}) = 11$.

$\chi(\frac{P}{\mathfrak{a}}) = 24-35+11-1 = -1 < 0$.

Hier ist:

$$H_0 = 0 \text{ und } \dim_{\mathbb{C}} H_1 = 1$$

(4.6) Sei $\mathfrak{a} \subseteq P = k[\![X,Y]\!]$ ein Ideal und $\vartheta(\mathfrak{a})$ der von den partiellen Ableitungen von Elementen von $\mathfrak{a}$ erzeugte k-Untervektorraum von P.

Ist $\mathfrak{a}$ ein (X,Y)-primäres Ideal, so gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $(X,Y)^l \subseteq \mathfrak{a}$, es folgt $(X,Y)^{l-1} \subseteq \vartheta(\mathfrak{a})$.

Also ist dann auch $\frac{P}{\vartheta(\mathfrak{a})}$ endlichdimensional.

In diesem Fall gilt:

Satz 16

$$\dim_k D_k\left(\frac{P}{\mathfrak{r}}\right) \leq \dim_k \frac{P}{\mathfrak{r}} + \dim_k \frac{P}{\vartheta(\mathfrak{r})} - 1 .$$

Beweis:

Da $\mathfrak{r}$ ein (X,Y)-primäres Ideal ist, existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $(X,Y)^l \subseteq \mathfrak{r}$.

Sei $B := \frac{k[\![X,Y]\!]}{(X,Y)^l}$.

Da B homogen ist, ist die Sequenz:

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{d_{-1}} B \xrightarrow{d_0} D_k(B) \xrightarrow{d_1} \bigwedge^2 D_k(B) \longrightarrow 0 \quad \text{exakt.}$$

Sei $U_1 = \frac{Pd\mathfrak{r}}{Pd(X,Y)^l}$ und $U_2 = \frac{\vartheta(\mathfrak{r})}{(X,Y)^{l-1}}$.

Es ist $\bigwedge^2 D_k(B) = \frac{k[\![X,Y]\!]}{(X,Y)^{l-1}}$.

Es gilt $\dim_k U_1 = \dim_k d_1(U_1) + \dim_k U_1 \cap \text{Kern } d_1$.

Außerdem gilt $d_1(U_1) = \frac{\vartheta(\mathfrak{r})}{(X,Y)^{l-1}} = U_2$.

Ist nämlich $g \in \vartheta(\mathfrak{r})$, so existieren ω_1, ω_2 mit $g = \frac{\partial \omega_1}{\partial X} + \frac{\partial \omega_2}{\partial Y}$

und dann ist $g = d_1(-\omega_2\, dX + \omega_1\, dY)$.

Da Bild d_o = Kern d_1 gilt, folgt $\dim_k U_1 \cap \text{Kern } d_1 =$

$= \dim_k U_1 \cap \text{Bild } d_o$.

Sei nun $f \in \frac{\mathfrak{r}}{(X,Y)^l}$.

Dann gilt sicherlich $d_o f \in U_1 \cap \text{Bild } d_o$.

Die Abbildung $d_1 : \frac{\mathfrak{o}}{(X,Y)^l} \longrightarrow U_1 \cap \text{Bild } d_o$ ist injektiv.

$$f \longmapsto d_o(f)$$

Also gilt: $\dim_k U_1 \cap \text{Bild } d_o \geq \dim_k \frac{\mathfrak{o}}{(X,Y)^l}$.

Insgesamt folgt: $\dim_k U_1 \geq \dim_k \frac{\vartheta(\mathfrak{o})}{(X,Y)^{l-1}} + \dim_k \frac{\mathfrak{o}}{(X,Y)^l}$

Andererseits gilt:

$$\dim_k U_1 = \dim_k \frac{Pd\,\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}P^2} + 2\dim_k \frac{\mathfrak{o}}{(X,Y)^l} - \dim_k \frac{Pd(X,Y)^l}{(X,Y)^l P^2} .$$

Es gilt $\dim_k \frac{Pd(X,Y)^l}{(X,Y)^l P^2} = \dim_k \frac{(X,Y)^l}{(X,Y)^{l+1}} = l+1$.

Nun kann man $\dim_k \frac{Pd\,\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}P^2}$ ausrechnen.

$$\dim_k \frac{Pd\,\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}P^2} \geq \dim_k \frac{\vartheta(\mathfrak{o})}{(X,Y)^{l-1}} + \dim_k \frac{\mathfrak{o}}{(X,Y)^l} - 2\dim_k \frac{\mathfrak{o}}{(X,Y)^l} + (l+1) =$$

$$= \dim_k \frac{\vartheta(\mathfrak{o})}{(X,Y)^{l-1}} - \dim_k \frac{\mathfrak{o}}{(X,Y)^l} + l+1 =$$

$$= \dim_k \frac{P}{(X,Y)^{l-1}} - \dim_k \frac{P}{\vartheta(\mathfrak{o})} - \dim_k \frac{P}{(X,Y)^l} +$$

$$+ \dim_k \frac{P}{\mathfrak{o}} + l + 1 =$$

$$= \dim_k \frac{\vartheta(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}} - \dim_k \frac{(X,Y)^{l-1}}{(X,Y)^l} + l+1 = \dim_k \frac{\vartheta(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}} + 1 .$$

Nun ist:

$$\dim_k D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) = 2 \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} - \dim_k \frac{P d\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} P^2}$$

$$\leq 2 \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} - \dim_k \frac{\vartheta(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}} - 1$$

$$= \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} + \dim_k \frac{P}{\vartheta(\mathfrak{a})} - 1.$$

(4.7) Lemma 2

Ist $\mathfrak{a} \subset P = k[\![X,Y]\!]$ ein (X,Y) - primäres Ideal, so gilt:

$$\dim_k D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) \geq \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} + \dim_k \bigwedge^2 D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) - \dim_k \operatorname{Kern} d_o .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \dim_k D_k (A) &= \dim_k \operatorname{Kern} d_1 + \dim_k \operatorname{Bild} d_1 = \\ &= \dim_k \operatorname{Kern} d_1 + \dim_k \bigwedge^2 D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) = \\ &\geq \dim_k \operatorname{Bild} d_o + \dim_k \bigwedge^2 D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) = \\ &= \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} + \dim_k \bigwedge^2 D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) - \dim_k \operatorname{Kern} d_o . \end{aligned}$$

Bemerkung:

Es gilt also:

$$\dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} + \dim_k \bigwedge^2 D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) - \dim_k \operatorname{Kern} d_o \leq \dim_k D_k \left(\frac{P}{\mathfrak{a}}\right) \leq$$

$$\leq \dim_k \frac{P}{\mathfrak{a}} + \dim_k \frac{P}{\vartheta(\mathfrak{a})} - 1.$$

Satz 17

Es gilt:

Die Sequenz

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{d_{-1}} \frac{P}{\mathfrak{o}} \xrightarrow{d_0} D_k\left(\frac{P}{\mathfrak{o}}\right) \xrightarrow{d_1} \bigwedge^2 D_k\left(\frac{P}{\mathfrak{o}}\right) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

1. Kern $d_0 = k$
2. $\mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ ist ein Ideal

Beweis:

„$\Longleftarrow$" Wenn $\mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ ein Ideal ist, gilt $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{d}(\mathfrak{o})$

Wegen $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ gilt $\bigwedge^2 D_k\left(\frac{P}{\mathfrak{o}}\right) = \frac{P}{\mathfrak{d}(\mathfrak{o})}$.

Nach der vorausgehenden Bemerkung ist dann

$$\dim_k D_k\left(\frac{P}{\mathfrak{o}}\right) = \dim_k \frac{P}{\mathfrak{o}} + \dim_k \bigwedge^2 D_k\left(\frac{P}{\mathfrak{o}}\right) - 1 .$$

In diesem Fall ist

$$\dim_k \frac{\text{Kern } d_0}{\text{Bild } d_1} = \dim_k \frac{\text{Kern } d_1}{\text{Bild } d_0} .$$

Da $\dfrac{\text{Kern } d_0}{\text{Bild } d_1} = 0$ ist, muß auch $\dfrac{\text{Kern } d_1}{\text{Bild } d_0} = 0$ sein,

damit ist die Sequenz exakt.

„$\Longrightarrow$" Zu zeigen bleibt: $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{d}(\mathfrak{o})$, dann ist $\mathfrak{d}(\mathfrak{o})$ ein Ideal.

Sei $\omega \in \mathfrak{o}$. Dann existiert ein $\eta \in P$ mit $d_1(\eta\, dY) = \omega$ (formales Integrieren). Für die Restklasse $\overline{\eta\, dY}$ von ηdY modulo $P\, d\mathfrak{o}$ gilt dann $d_1(\overline{\eta\, dY}) = 0$ in $\bigwedge D_k\left(\frac{P}{\mathfrak{o}}\right)$.

Da der De Rham-Komplex von $\frac{P}{\mathfrak{o}}$ exakt ist, folgt

$\overline{\eta\, dY} \in$ Bild d_0.

Dann gibt es $\varkappa_i \in \mathfrak{a}$, $0 \leq i \leq 2$, und $f \in P$ mit

$$\eta\, dY = d_o f + d_o \varkappa_o + \varkappa_1\, dX + \varkappa_2\, dY$$

also $\omega = d_1(\eta dY) = d_1(\varkappa_1 dX + \varkappa_2 dY) = -\frac{\partial \varkappa_1}{\partial Y} + \frac{\partial \varkappa_2}{\partial X} \in \vartheta(\mathfrak{a})$.

(4.8) 3. Beispiel

Wenn eine k-Algebra quasihomogen ist, so ist die De Rham-Sequenz exakt.

Die Frage ist nun, ob man umgekehrt schließen kann, daß, falls die De Rham-Sequenz exakt ist, die k-Algebra quasihomogen ist.

Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall- wie das folgende Beispiel zeigt.

Es sei $\mathfrak{a} = (X^3+XY^5+Y^7, X^2Y^7, Y^8) \subseteq P := \mathbb{C}[\![X,Y]\!]$

Um die Exaktheit des De Rham-Komplexes zu zeigen, genügt es, Kern $d_o = \mathbb{C}$ und $\varkappa(P/\mathfrak{a}) = 0$ zu zeigen.

$\frac{Pd\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}P^2}$ wird als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt von den Restklassen modulo $\mathfrak{a}P^2$ von

$$\begin{pmatrix} 3X^2+Y^5 \\ 5XY^4+7Y^6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2XY^5-3Y^7 \\ 5X^2Y^4+7XY^6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X^2Y^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3X^2Y+Y^6 \\ 5XY^5+7Y^7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2XY^6 \\ 5X^2Y^5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3X^2Y^2+Y^7 \\ 5XY^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^2Y^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^2Y^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^2Y^5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^2Y^6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} XY^7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ Y^7 \end{pmatrix} \quad , \begin{pmatrix} 0 \\ XY^7 \end{pmatrix} \quad .$$

Es gilt $\dim \dfrac{Pd\,\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}P^2} = 13.$

Da $\dim \overset{P}{/\mathfrak{w}} = 23$ ist, folgt $\dim D_{\mathbb{C}}(\overset{P}{/\mathfrak{w}}) = 33.$

Es ist $\tilde{\mathfrak{w}} = (X^2 + \frac{1}{3}Y^5,\ XY^4 + \frac{7}{5}Y^6, Y^7)$, also $\dim_{\mathbb{C}} \overset{2}{\bigwedge} D_{\mathbb{C}}(\overset{P}{/\mathfrak{a}}) = 11$

Es folgt:

$$\mathcal{H}(\overset{P}{/\mathfrak{w}}) = -\dim \mathbb{C} + \dim_{\mathbb{C}} \overset{P}{/\mathfrak{w}} - \dim_{\mathbb{C}} D_{\mathbb{C}}(\overset{P}{/\mathfrak{a}}) + \dim \overset{2}{\bigwedge} D_{\mathbb{C}}(\overset{P}{/\mathfrak{w}}) =$$

$$= -1 + 23 - 33 + 11 = 0 \ .$$

Bild d_o wird als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt von den Restklassen modulo $Pd\,\mathfrak{w}$ von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2X \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2XY \\ X^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2Y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y^2 \\ 2XY \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2XY^2 \\ 2X^2Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3Y^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y^3 \\ 3XY^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2XY^3 \\ 3X^2Y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4Y^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y^4 \\ 4XY^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2XY^4 \\ 4X^2Y^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5Y^4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y^5 \\ 5XY^4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2XY^5 \\ 5X^2Y^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6Y^5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y^6 \\ 6XY^5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2XY^6 \\ 6X^2Y^5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7Y^6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y^7 \\ 7XY^6 \end{pmatrix} .$$

Außerdem gilt:

$$\begin{pmatrix} 2XY^5 \\ 5X^2Y^4 \end{pmatrix} \equiv -3 \begin{pmatrix} Y^7 \\ 7XY^6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10X^2Y^4+28XY^6 \end{pmatrix} \quad \text{modulo } P d\mathfrak{w}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2XY^6 \\ 6X^2Y^5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 11X^2Y^5 \end{pmatrix} \quad \text{modulo } P\, d\mathfrak{w}.$$

Gäbe es nur ein $f \in (X,Y)$ mit $d_o f \in P\, d\mathfrak{w}$, so gäbe es eine Relation modulo $\mathfrak{w}P^2$ der Basiselemente von $\frac{Pd\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}P^2}$ und derBasiselemente von Bild d_o. Offensichtlich ist dies aber nicht der Fall. Also ist Kern $d_o = \mathbb{C}$ und damit ist der De Rham-Komplex von $\frac{P}{\mathfrak{w}}$ exakt.

Andererseits ist P/α nicht quasihomogen, da α nicht von homogenen Elementen erzeugt wird. $X^3+XY^5+Y^7$ ist nämlich nicht homogen, da es sonst positive natürliche Zahlen m_1, m_2 mit $3m_1=m_1+5m_2=7m_2$ gäbe. Widerspruch!

§ 5. Die Torsion des Differentialmoduls von Kurvensingularitäten.

(5.1) Sei wieder k ein Körper, $P := k[\![X_1,\dots,X_n]\!]$ der formale Potenzreihenring über k und $\mathfrak{a} \subsetneq P$ ein Ideal. Sei $R := P/\mathfrak{a}$.

Dann gilt:

Lemma 3

Sei R ein reduzierter Ring mit dim R = 1 und $x \in \mathfrak{m}_R$ ein Nichtnullteiler.
Es sei N ein torsionsfreier R-Modul mit Rang N=1.
Dann gilt:

$$\dim_k N/xN = \dim_k R/xR \quad .$$

Beweis:

Sei S die Menge der Nichtnullteiler von R. Dann ist S ein multiplikatives System in R. Da N torsionsfrei ist, ist der kanonische R-Homomorphismus $N \longrightarrow N_S$ injektiv. Da Rang N=1 gilt, existiert ein freier R-Modul F vom Rang 1, so daß N/F ein Torsionsmodul ist. Tensorieren mit dem totalen Quotientenring R_S liefert $0 = N/F \otimes_R R_S = N_S/F_S$, also $N_S = F_S$. Außerdem ist $F_S \cong R_S$. Es existiert also ein injektiver R-Homomorphismus $N \hookrightarrow R_S$. Da N ein endlicher R-Modul ist, gibt es einen injektiven R-Homomorphismus $N \hookrightarrow R$. N ist also zu einem Ideal $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ isomorph.
Die exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$

liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to \frac{\mathfrak{m} \cap xR}{x\mathfrak{m}} \to \mathfrak{m} \otimes_R \frac{R}{xR} \to R \otimes_R \frac{R}{xR} \to \frac{R}{\mathfrak{m}} \otimes_R \frac{R}{xR} \to 0.$$

Das Multiplizieren mit x liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to R \xrightarrow{\cdot x} R \to \frac{R}{xR} \to 0.$$

Es folgt die exakte Sequenz

$$0 \to \frac{\mathfrak{m}:x}{\mathfrak{m}} \to \frac{R}{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\cdot x} \frac{R}{\mathfrak{m}} \to \frac{R}{xR} \otimes_R \frac{R}{\mathfrak{m}} \to 0.$$

Offensichtlich gilt $\frac{\mathfrak{m}:x}{\mathfrak{m}} \underset{R}{\simeq} \frac{\mathfrak{m} \cap xR}{x\mathfrak{m}}$.

Wegen $\dim_k \frac{R}{\mathfrak{m}} = \dim_k \frac{R}{\mathfrak{m}}$ folgt $\dim_k \frac{\mathfrak{m}:x}{\mathfrak{m}} = \dim_k \frac{R}{xR} \otimes_R \frac{R}{\mathfrak{m}}$.

In die erste lange exakte Sequenz eingesetzt,
folgt $\dim_k \mathfrak{m} \otimes_R \frac{R}{xR} = \dim_k \frac{R}{xR}$. Da $\mathfrak{m} \underset{R}{\simeq} N$ ist, gilt
$\mathfrak{m} \otimes_R \frac{R}{xR} \underset{R}{\simeq} \frac{N}{xN}$. Damit folgt die Behauptung.

(5.2) Sei $D_k(R)$ der universelle Differentialmodul von R
$T(D_k(R))$ sei der Torsionsmodul von $D_k(R)$.

Lemma 4

Sei $x \in \mathfrak{m}_R$ ein Nichtnullteiler
Dann gilt:
Ist $T(D_k(R)) = 0$, so folgt: $\dim_k D_k(\frac{R}{xR}) \leq \dim_k \frac{R}{xR} - 1$.

Beweis:

Sei $N := \dfrac{D_k(R)}{T(D_k(R))}$.

Die Sequenz

$$0 \longrightarrow T(D_k(R)) \longrightarrow D_k(R) \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

ist exakt, also auch

$$0 \longrightarrow \frac{T(D_k(R))}{xT(D_k(R))} \longrightarrow \frac{D_k(R)}{xD_k(R)} \longrightarrow \frac{N}{xN} \longrightarrow 0 ,$$

da $T(D_k(R)) \cap x\, D_k(R) = x\, T(D_k(R))$ gilt.

Mit Lemma 1 folgt dann:

$$\dim_k \frac{D_k(R)}{x\, D_k(R)} = \dim_k \frac{T(D_k(R))}{xT(D_k(R))} + \dim_k \frac{R}{xR} .$$

Wegen $T(D_k(R)) = 0$ gilt also $\dim_k \dfrac{D_k(R)}{xD_k(R)} = \dim_k \dfrac{R}{xR}$.

Nun ist $D_k\left(\dfrac{R}{xR}\right) = \dfrac{D_k(R)}{xD_k(R)+Rdx} = \dfrac{\frac{D_k(R)}{xD_k(R)}}{\frac{xD_k(R)+Rdx}{xD_k(R)}}$.

Aus der Exaktheit der Sequenz

$$\frac{xR}{x^2R} \longrightarrow \frac{D_k(R)}{xD_k(R)} \longrightarrow D_k\left(\frac{R}{xR}\right) \longrightarrow 0$$

folgt $\dfrac{xR}{x^2R} = 0$, also $x\,R = x^2R$.

Also existiert ein $f \in R$ mit $x = x^2 f$.

Damit gilt $x(1-xf) = 0$ und da x ein Nullteiler in A ist, gilt $xf=1$, also ist x eine Einheit in A im Widerspruch zu $x \in m_A$.

Also gilt: $\dim_k D_k\left(\frac{R}{xR}\right) \geq \dim_k \frac{D_k(R)}{xD_k(R)} - 1 = \dim_k \frac{R}{xR} - 1$

(5.3) Satz18

Es sei k ein Körper. Sei $R = \frac{k[\![X_1,\ldots X_n]\!]}{\mathfrak{a}}$

eine nullteilerfreie k-Algebra mit dim R=1.
Sei $D_k(R)$ torsionsfrei.
Gilt n = 3 oder R vollständiger Durchschnitt, so ist R bereits regulär.

Beweis:

Gelte zunächst, daß die Einbettungsdimension von R kleiner oder gleich 3 ist.
Sei nun $x \in m_R$ und $A := \frac{R}{xR}$.

Nach Lemma 4 gilt $\dim_k D_k(A) \leq \dim_k A - 1$
Ist die Einbettungsdimension Dim R = 3, so gilt
Dim A = 2 und nach Satz 5 folgt $\dim_k D_k(A) \geq \dim_k A$.
Widerspruch!
Ist Dim R = 2, so ist R vollständiger Durchschnitt.
Ist Dim R = 1, so ist R, wie gewünscht, regulär.
Sei nun R vollständiger Durchschnitt.
Dann gibt es nach Satz 7 ein $x \in m_R$ mit

$$\dim_k \frac{D_k(R)}{xD_k(R)} \geq \dim_k \frac{R}{xR} + 1, \text{ falls Dim } R \neq 1 \text{ ist.}$$

Nach Lemma 3 ist dies nicht möglich, falls $D_k(R)$ torsionsfrei ist.

Literaturverzeichnis

1) Bassein, R., On Smoothable Curve Singularities: Local Methods, Math. Ann. 230 (1977).

2) Berger, R., Differentialmoduln eindimensionaler lokaler Ringe, Math. Z. 81 (1963).

3) Buchweitz, R.-O. & Greuel, G.-M., The Milnor Number and Deformations of Complex Curve Singularities, IHES (1979).

4) Bourbaki, N., Algèbre Commutative, Hermann (1964).

5) Damon, J. & Galligo, A., A Topological Invariant for Stable Map Germs, Inv. math. 32 (1976).

6) Galligo, A., Théorème de division et stabilité en géometrie analytique locale, Thèse Univ. de Nice (1977).

7) Herzog, J., Ein Cohen-Macaulay-Kriterium mit Anwendungen auf den Konormalenmodul und den Differentialmodul, Math. Z. 163 (1978).

8) Herzog, J. & Waldi, R., Cotangent functors of curve singularities, Preprint.

9) Reiffen, H.-J., Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen, Math. Z. 101 (1967).

10) Scheja, G., Differentialmoduln lokalen analytischen Algebren, Schriftenreihe des Math. Inst. Fribourg (1969).

11) Scheja, G. & Storch, U., Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten, Journal f. d. reine u. angew. Math. 278/279 (1975).

12) Scheja, G. & Wiebe, H., Über Derivationen von lokalen analytischen Algebren, Symp. Math. XI (1973).

13) Storch, U., Zur Längenberechnung von Moduln, Arch. Math. 24 (1973).

14) Ulrich, B., Torsion des Differentialmoduls und Kotangentenmodul von Kurvensingularitäten, Arch. Math. 36 (1981).

15) Urban, W., Verallgemeinerte Weierstraß-Division, Diplomarbeit Bochum (1979).

16) Galligo, A., A propos du théorème de préparation de Weierstrass. In: Fonctions de plusieurs variables complexes, Springer 1974.

Lebenslauf

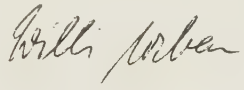
Ich wurde am 11. 3. 1952 als Sohn der Eheleute Willi und Margarete Urban in Duisburg geboren. 1958 wurde ich in die Katholische Volksschule im Stadtteil Großenbaum eingeschult und besuchte 1966 das Theodor-Heuss-Gymnasium in Duisburg-Meiderich, wo ich 1972 das Abitur ablegte. Im Oktober 1972 begann ich das Studium der Fächer Mathematik und Physik an der Ruhr-Universität in Bochum.

1979 erlangte ich den Grad eines Diplom-Mathematikers. Seit 1979 bin ich als Wissenschaftlicher Assistent an der Ruhr-Universität tätig.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren G. Scheja, U. Storch, H. Amann und P. Gänssler.

Bochum, im September 1982

Hiermit erkläre ich, daß ich die Arbeit selbständig und ohne unerlaubte Hilfe verfaßt habe und daß sie in dieser oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Fakultät eingereicht worden ist.



DER DRUCKER - Buscheystraße 138 - 4630 Bochum - Tel. (02 34) 70 41 16